

**THESE**

---

présentée pour obtenir

le titre de

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONALE  
POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE**

Ecole doctorale : **Energétique et dynamique des fluides**

Spécialité : **Mécanique des Fluides**

par

**Arnaud BARTHET**

---

**Amélioration de la prévision des coefficients aérodynamiques autour  
de configurations portantes par méthode adjointe**

---

Soutenue le 31 Mai 2007 devant le jury composé de :

M. Alain Dervieux	Directeur de Recherche INRIA	Rapporteur
M. Pierre Sagaut	Professeur Université Paris 6	Rapporteur
Mme Marianna Braza	Directeur de Recherche CNRS	Directeur
M. Christophe Airiau	Maître de conférence Université Paul Sabatier et IMFT	Co-directeur
M. Loïc Tournette	Ingénieur AIRBUS	Examineur
M. Werner Haase	Directeur de la Recherche EADS	Examineur

Thèse préparée à l'IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) en relation avec Airbus  
FRANCE



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Alain Dervieux et M. Pierre Sagaut d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et de m'avoir communiqué leurs remarques, corrections et suggestions. Je remercie également Mme Marianna Braza, M. Christophe Airiau, M. Werner Haase et M. Loïc Tourrette pour leur participation à mon jury de thèse.

Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre l'IMFT et Airbus. Du côté de l'IMFT, je tiens à remercier mes encadrants Mme Marianna Braza et M. Christophe Airiau qui tout au long de cette thèse m'ont soutenu, conseillé, corrigé mes fautes de français et enfin aidé à faire ma soutenance. Je les remercie aussi pour toute leur gentillesse et attention. Du côté d'Airbus, je souhaite exprimer ma gratitude à M. Jean-guy Goutaudier et M. Eric Chaput pour leur accueil au sein du département "aerodynamic design and data" ainsi que M. Stéphane Viala et par la suite M. Pascal Larrieu pour mon intégration dans l'équipe "Methode and Tools". Je n'oublie pas mon encadrant côté Airbus, M. Loïc Tourrette qui a dû me supporter et garder son calme pendant trois ans. Il a été un conseiller tout au long de ma thèse pour que je ne me perde pas trop. Sa gentillesse et sa bienveillance ont été un grand atout.

Je souhaite aussi exprimer toute mes remerciements à ma mère, mon père, mes soeurs, mes grands-parents et tout ceux qui font ma famille qui m'ont aidé moralement durant ces 3 années et plus particulièrement Marie-France qui a toujours été là.

Tout au long de cette thèse j'ai rencontré pas mal de personnes talentueuses et je voudrais ici leur exprimer toutes ma gratitude, j'espère être assez exhaustif.

Je tiens remercier : Guillaume Martinat avec qui j'ai partagé des bières ainsi que des discussions philosophiques aussi bien sur la mécanique des fluides que sur la condition humaine, Rodolphe Perrin qui a toujours été un compagnon de route depuis mon DEA et qui est toujours prompt à répondre aux mails qui lui sont adressés surtout si Caen a gagné contre Toulouse au football, Remy Bourguet avec qui j'ai pu avoir de belles discussions sur les mathématiques, Yannick Hoarau qui m'a initié au monde obscur de la CFD, Julien Delbove avec qui j'ai apprécié les pauses, ses discussions sur l'aéroélasticité, les films... et son thé, Matthieu Meaux qui m'a initié à monde merveilleux de l'interprétation d'un champ adjoint ainsi qu'au parler Ch'ti, Fabien Dezitter autre Ch'ti qui a le mérite d'aimer les Mister freeze surtout en contact avec des profils d'aile et qui a des goûts cinématographique d'une grande qualité, Cyril Gacherieu qui a toujours su expliquer les modèles de turbulences avec des mots simples pour mon esprit, Ranjit Collercandy qui préférera toujours les pommes à Bill, Jérôme Journade qui m'a montré la voie et encouragé à réussir ma thèse, Stéphane Amant pour ses explications sur la traînée champs lointain ainsi que sa patience quand je venais lui poser trois fois la même question

et sa pédagogie pour m'avoir appris à apprécier le thé, Julien Laurenceau pour m'avoir fait découvrir des films que je ne connaissais pas, Florian Blanc à qui je souhaite de la réussite dans sa thèse, Luis Barrera qui a toujours une belle blague, Marianne Cormery pour m'avoir aidé avec l'optimisation de forme, Jérôme Bosc pour sa bonne humeur et son soutien au niveau des maillages, Laurent Labracherie qui m'a bien aidé sur MBREF, DALI et au niveau informatique, Renaud Sauvage pour ses belles discussions sur l'adaptation de maillage, Karen Garbi pour sa gentillesse, Guillaume Voizard pour son aide à la compilation, le langage informatique et sa gentillesse, Damien Guénot pour m'avoir enseigné les règles élémentaires de la bienséance, Matthieu Pierres qui a commencé sa thèse en même temps que moi, Guillaume Nolin qui a souffert en même temps que moi pendant sa soutenance de thèse, Damien Tortochaux, Jean-Philippe Estrade et Guilhem Chanteperdrix pour leur support pour le post-traitement des mes calculs, Steeve Champagneux qui m'a bien aidé pour l'élaboration de la soutenance de thèse, tout le plateau Airbus côté Altran qui m'a bien accueilli pendant la fin de la thèse, Marie-Jo Estéve qui m'a donné le goût de l'aérothermie et du non-structuré, Sébastien Rouvreau qui m'a fait découvrir les spécialités culinaires anglaises, Thomas Ricou qui m'a invité à son pôt, Christophe Claris qui a illuminé le box pendant une année, Docland qui a toujours été performant pour me fournir des articles, Muriel Sabater pour son soutien rapide à chacun de mes problèmes de reprographie. Je remercie tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma thèse et que j'ai oublié de citer ici.

Pour finir je voudrais remercier les chercheurs Français ou étrangers qui m'ont montré la solidarité qui existe en science et qui ont pris du temps pour répondre à mes questions, m'aider dans la compréhension du sujet comme M. Venditti, M. Kim, M. Hagmeijer, M. Destarac,...

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Problèmes direct et adjoint</b>	<b>8</b>
1.1 Equations continues . . . . .	8
1.1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	8
1.1.2 Les équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	10
1.1.3 Conclusion . . . . .	15
1.2 Méthode Numérique . . . . .	15
1.2.1 Résolution des équations de Navier-Stokes - RANS . . . . .	15
1.2.2 Equations adjointes discrètes . . . . .	19
1.2.3 Conclusion . . . . .	20
<b>2 Correction, erreur et adaptation de maillage</b>	<b>22</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.1.1 Correction de coefficients aérodynamiques . . . . .	22
2.1.2 Calcul de l'erreur . . . . .	25
2.2 Correction et erreur basées sur l'opérateur adjoint . . . . .	27
2.2.1 Théorie de la correction adjointe discrète . . . . .	28
2.2.2 Interpolation . . . . .	30
2.2.3 Normalisation de l'erreur adjointe . . . . .	32
2.3 Décomposition de la traînée champ lointain . . . . .	32
2.3.1 Analyse phénoménologique de la décomposition de la traînée . . . . .	33
2.3.2 Détection des cellules pour le calcul de la traînée . . . . .	34
2.4 Correction adjointe appliquée à la traînée champ lointain . . . . .	35
2.5 Raffinement et adaptation de maillage . . . . .	37
2.5.1 Introduction à l'adaptation de maillage . . . . .	37
2.5.2 Raffinement de maillage adaptatif . . . . .	37
2.5.3 Adaptation du maillage par déplacement des noeuds . . . . .	41
2.5.4 Bilan sur les techniques d'adaptation de maillage . . . . .	43
2.6 Conclusion . . . . .	43
<b>3 Application de la correction basée sur l'opérateur adjoint</b>	<b>44</b>
3.1 Ecoulements non-visqueux - approche EULER . . . . .	44
3.1.1 Ecoulement subsonique autour d'un profil d'aile . . . . .	45
3.1.2 Ecoulement transsonique autour d'un profil d'aile . . . . .	49
3.1.3 Ecoulement transsonique autour d'une aile . . . . .	51
3.1.4 Ecoulement transsonique autour d'un avion complet . . . . .	56

3.1.5	Bilan de la correction adjointe sur les écoulements non-visqueux . . . . .	57
3.2	Écoulements visqueux - approche RANS . . . . .	58
3.2.1	Génération des maillages Navier-Stokes . . . . .	59
3.2.2	Écoulement subsonique autour d'un profil d'aile . . . . .	59
3.2.3	Écoulement subsonique autour d'un profil d'aile avec forme de givre . . .	62
3.2.4	Écoulement transsonique autour d'un profil d'aile . . . . .	64
3.2.5	Écoulement transsonique autour d'une aile . . . . .	66
3.2.6	Écoulement transsonique autour d'un avion complet . . . . .	72
3.2.7	Écoulement transsonique autour d'un avion complet de type Airbus . . .	76
3.2.8	Bilan de la correction adjointe sur les écoulements visqueux . . . . .	77
3.3	Conclusion sur la correction adjointe . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Enrichissement et adaptation de maillage</b>	<b>79</b>
4.1	Choix du senseur . . . . .	79
4.1.1	Introduction . . . . .	79
4.1.2	Profil dans un écoulement subsonique visqueux . . . . .	79
4.1.3	Profil dans un écoulement transsonique visqueux . . . . .	83
4.1.4	Aile dans un écoulement transsonique visqueux . . . . .	85
4.2	Enrichissement de Maillage (AMR) . . . . .	87
4.2.1	Introduction . . . . .	87
4.2.2	Profil dans un écoulement subsonique non-visqueux . . . . .	87
4.2.3	Profil avec forme de givre dans un écoulement subsonique visqueux . . .	89
4.2.4	Aile dans un écoulement transsonique visqueux . . . . .	90
4.2.5	Bilan sur l'utilisation de l'AMR . . . . .	93
4.3	Déplacement de Noeuds . . . . .	96
4.3.1	Introduction . . . . .	96
4.3.2	Adaptation globale, profil d'aile en fluide non-visqueux . . . . .	96
4.3.3	Adaptation pour sillage visqueux en deux dimensions . . . . .	97
4.3.4	Adaptation pour sillage visqueux en trois dimensions . . . . .	98
4.3.5	Bilan sur l'adaptation par déplacement des noeuds du maillage . . . . .	100
4.4	Conclusion sur l'adaptation de maillage . . . . .	103
	<b>Conclusion</b>	<b>104</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de volume</b>	<b>112</b>
A.1	Introduction . . . . .	112
A.2	Calcul du volume par le déterminant de la matrice Jacobienne . . . . .	112
A.3	Calcul du volume par décomposition en tétraèdre . . . . .	112
A.4	Calcul du volume par la formule de la divergence . . . . .	113
A.5	Comparaison des méthodes de calcul de volume . . . . .	114
<b>B</b>	<b>Convergence des maillages Navier-Stokes</b>	<b>116</b>
B.1	Cas du profil RAE2822 subsonique . . . . .	116
B.2	Cas du profil RAE2822 transsonique . . . . .	117

<b>C</b>	<b>Bonne pratique de maillage</b>	<b>119</b>
C.1	Introduction . . . . .	119
C.2	Dimension du domaine de calcul . . . . .	119
C.3	Maillages en deux dimensions . . . . .	119
C.3.1	Maillages de type Euler . . . . .	120
C.3.2	Maillages de type Navier-Stokes . . . . .	122
C.4	Maillages en trois dimensions . . . . .	123
C.5	Conclusion . . . . .	123

# Introduction

Dans un contexte de plus en plus soucieux d'un rapport qualité/prix élevé et dans un souci d'efficacité, étant donnée la concurrence internationale, la conception des avions doit devenir plus rapide, plus fiable et moins coûteuse. Les essais en soufflerie restent une référence. Ils sont indispensables pour avancer dans la compréhension des mécanismes physiques de la mécanique des fluides afin de mieux les modéliser. Cependant, les essais en soufflerie sont souvent lourds et coûteux à mettre en place. Les ingénieurs en conception aéronautique sont amenés à les utiliser plus rationnellement en y associant des approches de simulation numérique en mécanique des fluides (Computational Fluid Dynamics, CFD), qui incluent des applications autour d'avion complet. La CFD est un moyen rapide et économe pour la conception d'avion. Comme pour la soufflerie, l'utilisation de la CFD amène à s'interroger sur la fiabilité des résultats, qui peuvent être validés par ailleurs par des expériences physiques mieux ciblées et d'un coût réduit.

En ce qui concerne les erreurs engendrées lors d'une simulation (CFD), nous pouvons distinguer trois groupes d'erreurs potentielles.

Pour commencer, l'**erreur de modélisation** est définie comme la différence entre l'écoulement réel et la solution exacte fournie par le modèle mathématique qui décrit le comportement du fluide. Pour un fluide laminaire, nous pouvons considérer que l'erreur de modélisation est nulle. Pour un fluide turbulent, les équations supplémentaires ne prédisent pas toujours exactement le bon comportement de la turbulence.

Le second groupe d'erreurs est lié à la méthode de résolution des modèles mathématiques. L'**erreur de discrétisation** va représenter la différence entre la solution continue du modèle mathématique et la solution obtenue par discrétisation du domaine de calcul (maillage). Cette erreur dépend d'une part de la précision des schémas de discrétisation des équations considérées, et d'autre part de la discrétisation du domaine de calcul.

Notre modèle mathématique discrétisé va être résolu par un processus itératif. L'**erreur de convergence** est alors définie comme la différence entre la solution obtenue par le processus itératif et la solution exacte de notre système. Cette erreur correspond au troisième groupe d'erreurs.

De part la nature des écoulements étudiés (absence de décollement, régime stationnaire,...), l'erreur de modélisation pourra être considérée comme négligeable par rapport aux autres. De même, nous allons nous assurer à chaque fois de la convergence du calcul numérique, donc l'erreur de convergence pourra aussi être négligée. Il ne reste plus que l'erreur de discrétisation dont la grande partie viendra du maillage choisi pour simuler l'écoulement. Un compromis doit être trouvé entre des contraintes antagonistes : la complexité des configurations traitées, le temps de calcul et la taille limitée en mémoire des moyens informatiques. Le maillage doit alors être assez fin dans les zones d'intérêts de l'écoulement et plus grossier dans d'autres zones pour satisfaire ces différentes contraintes.



Le but de la présente thèse est l'amélioration de la précision des calculs numériques pour des écoulements externes turbulents sur des profils ou des ailes, et donc l'évaluation et la diminution de l'erreur de discrétisation.

Faire une erreur de 1% sur la traînée totale d'un avion long courrier correspond à environ 800kg de kérosène sur une distance de 10 000km, soit l'équivalent de cinq passagers. Cela représente 2% de manque à gagner pour les compagnies aériennes. Les erreurs doivent donc être estimées et réduites. La réduction de l'erreur de discrétisation a déjà été abordée de différentes manières. Pour commencer, lors de la production du maillage, tout est fait pour anticiper les zones d'intérêt de l'écoulement. Par exemple on essaie de faire un bon maillage proche de la peau pour bien simuler une couche limite dans un écoulement visqueux. Malheureusement, tous les phénomènes physiques ne peuvent pas être anticipés. Dans ce cas là, deux solutions se présentent à nous, soit utiliser les résultats obtenus pour prévoir la solution que l'on pourrait avoir sur un meilleur maillage, soit adapter le maillage en fonction de l'écoulement.

Les méthodes existantes dans l'état de l'art ne donnent qu'une relative satisfaction quant à l'évaluation et la minimisation de l'erreur. Elles sont surtout basées sur la définition spatiale de grandeurs physiques spécifiques données dans le volume (gradient du nombre de Mach, gradient de pression, ...). Il faut alors choisir une de ces grandeurs physiques qui sera adaptée à la configuration étudiée. Les informations fournies sont sur la représentation physique de cette grandeur par rapport au maillage et non sur la qualité intrinsèque du maillage.

Une donnée importante dans ce processus de certification des données issues de la CFD est de savoir quelles grandeurs nous intéressent. Dans un processus de conception avion, les données macroscopiques comme les coefficients de portance ou de traînée sont les données pour qualifier les performances d'un aéronef. L'adaptation ou la prévision des résultats doit avoir pour objectifs l'amélioration du calcul de ces coefficients. Récemment, des méthodes de correction et d'erreur basées sur le vecteur adjoint d'une fonction objectif ont été développées en non-structuré. Notre objectif va être d'adapter et d'évaluer tout le potentiel de ces méthodes pour les fonctions objectifs utilisées chez Airbus, dans le contexte d'un code de calcul CFD structuré.

Cette thèse va s'articuler autour de quatre chapitres. Tout d'abord, les équations des problèmes direct et adjoint et leur résolution numérique vont établir le cadre d'investigation de cette thèse. Ensuite, nous aborderons une étude bibliographique sur la détermination de la correction, l'erreur et l'adaptation de maillage. Les apports originaux de cette thèse à cette problématique seront alors présentés. Nous poursuivrons par l'application de la correction basée sur l'opérateur adjoint à des cas tests allant du profil en deux dimensions dans un fluide non-visqueux jusqu'à une application industrielle d'un avion complet avec un fuselage, une aile, un pylône et une nacelle motorisée, dans un écoulement visqueux. Pour ces cas tests, la correction basée sur l'opérateur adjoint sera utilisée pour des coefficients aérodynamiques avec une approche champ proche mais aussi champ lointain ce qui est une originalité de cette thèse. Dans le chapitre quatre, les résultats de l'erreur calculée à partir de la correction basée sur l'opérateur adjoint seront comparés aux erreurs calculées usuellement (gradient du nombre de Mach, gradient de pression, ...). Ensuite, l'erreur basée sur l'opérateur adjoint sera utilisée pour améliorer le maillage avec tout d'abord un enrichissement de maillage<sup>1</sup> et par la suite par déplacement des noeuds du maillage. Pour le déplacement des noeuds du maillage, on garde le

---

<sup>1</sup>L'enrichissement de maillage plus connu sous le sigle AMR (Adaptive Mesh Refinement), qui consiste dans un cadre structuré à introduire des sous-blocs de différents niveaux dans le maillage (voir la section 2.5.2)

nombre de noeuds fixe mais on change la répartition dans l'espace. Nous terminerons par une conclusion sur les résultats de cette thèse.

# Chapitre 1

## Problèmes direct et adjoint

Ce chapitre a pour but de présenter dans un premier temps les équations continues qui régissent l'écoulement fluide autour de notre avion (équations de Navier-Stokes appelées aussi équations directes), et dans un second temps les méthodes numériques mises en oeuvre pour résoudre ces équations. Ce chapitre finira par la description du problème adjoint (équations adjointes) et de sa résolution numérique.

Dans la suite de ce chapitre et de cette thèse, nous utiliserons la dénomination problème direct pour qualifier la résolution des équations de Navier-Stokes et problème adjoint pour la résolution des équations adjointes.

### 1.1 Equations continues

#### 1.1.1 Les équations de Navier-Stokes

Les équations instationnaires de Navier-Stokes sous leur forme conservative pour un fluide compressible avec des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(W) + \frac{\partial}{\partial x}(f - f_v) + \frac{\partial}{\partial y}(g - g_v) + \frac{\partial}{\partial z}(h - h_v) = 0 \quad (1.1)$$

avec  $t$  le temps physique. Le vecteur d'état  $W$  est :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

avec les vecteurs des densités du flux convectif définis par :

$$f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $U = (u, v, w)$  les composantes cartésiennes de la vitesse,  $p$  la pression et  $E$  l'énergie totale. Les vecteurs des densités du flux visqueux sont définis par :

$$f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ (\tau U)_x - q_x \end{pmatrix}, g_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ (\tau U)_y - q_y \end{pmatrix}, h_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ (\tau U)_z - q_z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses  $\tau$  sont données par :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique. Les équations de la dissipation visqueuse de l'énergie sont :

$$\begin{aligned} (\tau U)_x &= \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w \\ (\tau U)_y &= \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w \\ (\tau U)_z &= \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w \end{aligned}$$

et la densité de flux convectif de chaleur  $q$  est calculé à l'aide de la loi de Fourier :

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

où  $T$  est la température et  $k$  le coefficient de conductivité thermique. Pour un gaz parfait, la viscosité dynamique est donnée par la loi de Sutherland :

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \frac{(T_\infty + S_1)}{(T + S_1)}$$

avec  $\mu_\infty$  la viscosité à la température de référence  $T_\infty$  et  $S_1$  une constante généralement égale à  $110.4K$  dans l'atmosphère.

Avec l'hypothèse de la constante du nombre de Prandtl ( $Pr = 0.72$ ), le coefficient de conductivité thermique est constant et donné par :

$$k = \mu C_p / Pr$$

Les capacités calorifiques pour un gaz parfait sont  $C_v = r/(\gamma - 1)$  et  $C_p = \gamma C_v$ , avec  $\gamma = 1.4$ , et  $r$  la constante des gaz parfaits égale à 287 (J/kgK) dans l'atmosphère.

Une équation de plus est nécessaire pour fermer le système. La pression  $p$  est reliée au vecteur d'état  $W$  par la loi d'état des gaz parfaits :

$$p = \rho e(\gamma - 1) = \rho C_v T(\gamma - 1) = \rho r T \quad (1.5)$$

avec  $e$  l'énergie interne. L'énergie totale et l'énergie interne sont reliées par la relation :

$$e = E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \quad (1.6)$$

## 1.1.2 Les équations de Navier-Stokes moyennées

### 1.1.2.1 Introduction

Depuis le début des années 1800, les équations de Navier-Stokes sont considérées comme le meilleur moyen de régir l'écoulement d'un fluide. En introduisant les équations non dimensionnées pour un fluide compressible, nous pouvons en général sortir deux nombres sans dimensions principaux : le nombre de Mach  $\frac{V_{ref}}{a_{ref}}$  et le nombre de Reynolds  $\frac{\rho_{ref} l_{ref} V_{ref}}{\mu_{ref}}$  ( $V_{ref}$  la vitesse de référence,  $a_{ref}$  la vitesse du son de référence,  $\rho_{ref}$  la masse volumique de référence,  $l_{ref}$  la longueur de référence et  $\mu_{ref}$  la viscosité dynamique de référence). On a une similitude totale entre deux écoulements si on a les mêmes nombre de Mach et de Reynolds. Cette similitude est très difficile à réaliser entre un avion en vol et une maquette ou un modèle numérique, en particulier à cause de la différence des échelles de longueur et des vitesses. Pour l'étude de la turbulence, on s'intéresse en priorité au nombre de Reynolds. Quand le nombre de Reynolds est faible, les non-linéarités peuvent être considérées comme petites et la solution peut être correctement approchée. Pour ces écoulements, les effets visqueux sont dominants par rapport aux effets convectifs. Les trajectoires décrites par des particules lâchées dans l'écoulement forment des couches parallèles autour du corps, on dit que l'écoulement est laminaire. Pour les grands nombres de Reynolds, les effets convectifs deviennent prépondérants par rapport aux effets visqueux. Les contraintes dans le fluide deviennent plus importantes et les lignes de courant deviennent chaotiques, on dit que l'écoulement est turbulent.

### 1.1.2.2 L'approche moyennée

Le mouvement turbulent du fluide peut être décrit statistiquement. Une approche moyennée est alors appliquée aux équations de Navier-Stokes. Reynolds [57] propose de décomposer les propriétés de l'écoulement turbulent en une partie moyennée et une partie fluctuante. Nous pouvons alors introduire les équations de Navier-Stokes moyennées par la moyenne de Reynolds<sup>1</sup> d'un écoulement turbulent. De ce fait pour la moyenne de Reynolds, une propriété de

---

<sup>1</sup>Reynolds Average Navier-Stokes : RANS

l'écoulement  $\Phi$  peut être décomposée en une moyenne d'ensemble  $\overline{\Phi}$  plus une partie fluctuante  $\Phi''$  :

$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi'' \quad \overline{\Phi''} = 0 \quad (1.7)$$

La moyenne de Reynolds est souvent utilisée pour les fluides incompressibles alors que pour les fluides compressibles on lui préférera la moyenne de Favre [24]. Elle est définie comme suit :

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi' \quad \tilde{\Phi}' = 0 \quad (1.8)$$

où

$$\tilde{\Phi} = \frac{\overline{\rho\Phi}}{\bar{\rho}} \quad (1.9)$$

On peut souligner que les deux moyennes sont construites sur la moyenne d'ensemble, que  $\overline{\Phi'} \neq 0$  et que  $\tilde{\Phi}'' \neq 0$ . Pour des écoulements turbulents statistiquement stationnaires, c'est à dire que la moyenne statistique est indépendante du temps, les moyennes peuvent être calculées par rapport au temps :

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi dt \quad (1.10)$$

où la période  $T$  est grande comparée à la période relative des fluctuations. On peut alors supposer que les moyennes d'ensemble et temporelles sont équivalentes et possèdent les mêmes propriétés [21].

### 1.1.2.3 Les équations moyennées

La décomposition de Favre appliquée aux équations de Navier-Stokes est largement utilisée pour les solveurs Navier-Stokes. Si on applique cette décomposition aux variables de l'équation de Navier-Stokes, il en découle :

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' & \bar{\rho}' &= 0 & ; & P = \bar{P} + p' & \bar{p}' &= 0 \\ U_i &= \tilde{U}_i + u'_i & \overline{\rho u'_i} &= 0 & & i &= 1, 2, 3 \\ E &= \tilde{E} + E' & \overline{\rho E'} &= 0 & ; & T = \tilde{T} + T' & \overline{\rho T'} &= 0 \end{aligned}$$

avec  $U_i = (U, V, W)$  et  $u'_i = (u', v', w')$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Après la moyenne statistique de l'équation 1.1 devient :

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{f} - \overline{f_v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{g} - \overline{g_v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{h} - \overline{h_v}) = 0 \quad (1.11)$$

Le vecteur d'état  $\overline{W}$  n'est pas modifié, au contraire des vecteurs des densités du flux convectif  $\overline{f}$ ,  $\overline{g}$  et  $\overline{h}$  :

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{U} \\ \bar{\rho}\tilde{V} \\ \bar{\rho}\tilde{W} \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{U} \\ \bar{\rho}\tilde{U}^2 + \bar{P} \\ \bar{\rho}\tilde{U}\tilde{V} \\ \bar{\rho}\tilde{U}\tilde{W} \\ \tilde{U}(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P}) \end{pmatrix}, \bar{g} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{V} \\ \bar{\rho}\tilde{V}\tilde{U} \\ \bar{\rho}\tilde{V}^2 + \bar{P} \\ \bar{\rho}\tilde{V}\tilde{W} \\ \tilde{V}(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P}) \end{pmatrix}, \bar{h} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{W} \\ \bar{\rho}\tilde{W}\tilde{U} \\ \bar{\rho}\tilde{W}\tilde{V} \\ \bar{\rho}\tilde{W}^2 + \bar{P} \\ \tilde{W}(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P}) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Les vecteurs des densités du flux visqueux deviennent alors :

$$\begin{aligned} \bar{f}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{xx}} - \overline{\rho u' u'} \\ \overline{\tau_{xy}} - \overline{\rho u' v'} \\ \overline{\tau_{xz}} - \overline{\rho u' w'} \\ \tilde{U} \overline{\tau_{xx}} + \tilde{V} \overline{\tau_{xy}} + \tilde{W} \overline{\tau_{xz}} - \bar{q}_x - \overline{\rho E' u'} - \bar{P} u' + \overline{\tau_{xx} u'} + \overline{\tau_{xy} u'} + \overline{\tau_{xz} u'} \end{pmatrix} \\ \bar{g}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{yx}} - \overline{\rho v' u'} \\ \overline{\tau_{yy}} - \overline{\rho v' v'} \\ \overline{\tau_{yz}} - \overline{\rho v' w'} \\ \tilde{U} \overline{\tau_{yx}} + \tilde{V} \overline{\tau_{yy}} + \tilde{W} \overline{\tau_{yz}} - \bar{q}_y - \overline{\rho E' v'} - \bar{P} v' + \overline{\tau_{yx} v'} + \overline{\tau_{yy} v'} + \overline{\tau_{yz} v'} \end{pmatrix} \\ \bar{h}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{zx}} - \overline{\rho w' u'} \\ \overline{\tau_{zy}} - \overline{\rho w' v'} \\ \overline{\tau_{zz}} - \overline{\rho w' w'} \\ \tilde{U} \overline{\tau_{zx}} + \tilde{V} \overline{\tau_{zy}} + \tilde{W} \overline{\tau_{zz}} - \bar{q}_z - \overline{\rho E' w'} - \bar{P} w' + \overline{\tau_{zx} w'} + \overline{\tau_{zy} w'} + \overline{\tau_{zz} w'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

De nouvelles inconnues apparaissent dans les équations de conservation de la quantité de mouvement : les composantes du tenseur de Reynolds  $\overline{\rho u'_i u'_j}$ . Ce tenseur correspond au couplage entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes. Ce tenseur est symétrique et sa trace est égale au double de l'énergie cinétique turbulente  $\tilde{k}$  définie par  $\tilde{k} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ .

Le tenseur des contraintes visqueuses moyennées s'écrit :

$$\overline{\tau_{ij}} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \quad (1.15)$$

Certains termes de corrélations (pression-vitesse, énergie-vitesse et vitesse-dissipation) existent dans l'équation de l'énergie. Pour un gaz parfait nous obtenons la relation suivante :

$$\overline{\rho E' u'_i} = C_v \overline{\rho T' u'_i} + \overline{\rho u'_i u'_j} \tilde{U}_i + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_j u'_j u'_i} \quad (1.16)$$

et l'équation d'état devient :

$$\overline{P u'_i} = (\gamma - 1) C_v \overline{\rho T' u'_i} \quad (1.17)$$

Les vecteurs des densités du flux visqueux de l'énergie cinétique moyennée sont alors changés en :

$$\bar{f}_{i5}^v = \tilde{U}_j \overline{\tau_{ij}} - \bar{q}_i - C_p \overline{\rho T' u'_i} - \overline{\rho u'_i u'_j} \tilde{U}_i + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_j u'_j u'_i} + \overline{\tau_{ij} u'_i} - \overline{p' u'_i} \quad (1.18)$$

avec  $f_i^v = (f_v, g_v, h_v)$  et  $i = 1, 2, 3$ .

Pour beaucoup de modèles RANS utilisés en aérodynamique, la turbulence est supposée avoir un caractère incompressible. Cela signifie que les effets des fluctuations de la partie turbulente de la masse volumique sont faibles par rapport aux variations de la masse volumique moyennée. Cette hypothèse a été vérifiée par Morkovin [46] dans la couche limite turbulente pour des nombres de Mach inférieurs à 5. Grâce à cette hypothèse, les termes  $\overline{\tau_{ij}u'_i}$  et  $-\overline{p'u'_i}$  peuvent être négligés et la turbulence acquiert alors un caractère incompressible.

Une contribution turbulente est ajoutée à la densité de flux de chaleur. Son expression devient :

$$\overline{q_i} = -k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - C_p \overline{\rho T' u'_i} \quad (1.19)$$

L'énergie cinétique de l'écoulement s'accroît à cause des fluctuations turbulentes. L'expression générale de l'énergie est alors modifiée en :

$$\overline{\rho E} = \overline{\rho e} + \frac{1}{2}(\overline{\rho \tilde{U}_i^2} + \overline{\rho u_i'^2}) \quad (1.20)$$

La conséquence de la transformation des équations de Navier-Stokes dans leurs formes moyennées est une perte d'informations révélée par la création de nouvelles inconnues :

1. les composantes du tenseur de Reynolds  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  venant de la non-linéarité du terme d'advection. Ils peuvent être considérés comme des termes de diffusion turbulente.
2. le terme de densité de flux de chaleur turbulent  $C_p \overline{\rho T' u'_i}$
3. le terme de corrélation triple  $\frac{1}{2} \overline{\rho u'_j u'_j u'_i}$  qui peut être interprété comme un terme de diffusion d'énergie cinétique turbulente

#### 1.1.2.4 L'approximation de Boussinesq

Le fait de moyenner les équations de Navier-Stokes nous amène à un système avec plus d'inconnues que d'équations. Le principe de la modélisation est basé sur une clôture du système dont le but est de modéliser les nouvelles inconnues de façon plus ou moins compliquée. Plusieurs possibilités existent : les éliminer en les reliant à l'écoulement moyen ou encore ajouter de nouvelles équations et de ce fait de nouvelles inconnues. Le choix du modèle de turbulence est alors assujéti au type d'application que l'on veut faire. La complexité de l'écoulement, la précision souhaitée, la robustesse et la qualité numérique sont aussi des paramètres qui doivent être pris en compte. Plus le modèle sera compliqué, plus le temps de calcul sera grand. De plus les modèles de turbulence avec un grand nombre d'équations sont souvent moins robustes. Dans un contexte industriel, le coût de calcul est un facteur déterminant et seulement le champ moyen ou encore leurs intégrales (la portance, la traînée de frottement, de pression, etc...) sont intéressants dans une démarche de conception. De ce fait, dans la perspective de développement d'un outil industriel, on ne s'attachera qu'à présenter un modèle de clôture au premier ordre.

Cette approximation, proposée par Boussinesq [15] en 1887 est une clôture pour les équations de Navier-Stokes moyennées. C'est le point de départ du modèle de turbulence au premier ordre. La turbulence est supposée agir sur l'écoulement comme une viscosité dynamique. Le tenseur de Reynolds est alors relié linéairement au tenseur de déformation moyenné :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \overline{\rho} \delta_{ij} \tilde{k} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_t \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \quad (1.21)$$



avec  $\mu_t$  la viscosité dynamique turbulente.

De même, la densité de flux turbulent de chaleur est reliée à la température moyennée grâce à un coefficient de conductivité turbulent  $k_t$  :

$$-C_p \overline{\rho T' u'_i} = k_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

La valeur de  $k_t$  est fournie par le nombre turbulent de Prandtl supposé constant ( $Pr_t = 0.9$ ) :

$$k_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \quad (1.23)$$

et la corrélation triple devient :

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u'_j u'_j u'_i} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_i} \quad (1.24)$$

avec  $\sigma_k$  un coefficient de clôture admis comme étant constant.

Le système d'équations n'est pas encore clos car l'énergie cinétique turbulente n'est ni connue, ni un terme modélisé. Pour le modèle algébrique, l'énergie cinétique turbulente est tout simplement négligée et la valeur de la viscosité turbulente est calculée avec la valeur caractéristique de l'écoulement moyen. Pour beaucoup de modèles de turbulence, l'énergie cinétique turbulente  $\tilde{k}$  est une inconnue et a sa propre équation de transport. Par exemple, c'est le cas dans les modèles de turbulence à deux équations comme le modèle  $k - \varepsilon$ . La seconde équation de transport peut décrire aussi bien la dissipation que la vorticité. Ces modèles ne négligent pas  $\tilde{k}$  mais le coût de calcul est augmenté à cause du nombre d'équations supplémentaires à résoudre numériquement.

### 1.1.2.5 Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras

Le modèle de Spalart-Allmaras [61] est un modèle de turbulence à une seule équation. L'équation de transport décrit l'évolution de la viscosité cinématique turbulente modifiée  $\tilde{\nu}$  dans l'écoulement. Cette viscosité turbulente modifiée est linéaire par rapport à la distance à la paroi dans la zone proche paroi alors que dans l'écoulement  $\rho \tilde{\nu} = \mu_t$ . L'équation de transport est :

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}_{\text{convection}} = \underbrace{c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}}_{\text{production}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot (\tilde{\nu} \nabla (\tilde{\nu})) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2]}_{\text{diffusion}} - \underbrace{c_{w1} f_w(\tilde{r}) \left( \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \right)}_{\text{destruction}} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu_t &= \tilde{\nu} f_{v1} & f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} & \chi &= \frac{\tilde{\nu}}{\nu} & \tilde{S} &= \left| \overrightarrow{rot \vec{U}} \right| + \frac{\tilde{\nu}}{\chi^2 d^2} f_{v2} \\ f_w(\tilde{r}) &= g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} & g &= \tilde{r} + c_{w2} (\tilde{r}^6 - \tilde{r}) & \tilde{r} &\equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \end{aligned}$$

et les constantes sont :

$$c_{b1} = 0.1355 \quad \sigma = 2/3 \quad c_{b2} = 0.622 \quad \kappa = 0.41$$

$$c_{w1} = c_{b1} / \kappa^2 + (1 + c_{b2}) / \sigma \quad c_{w2} = 0.3 \quad c_{w3} = 2. \quad c_{v1} = 7.1$$

Ce modèle est largement utilisé dans un contexte industriel car il est robuste, relativement précis et n'est pas très coûteux d'un point de vue temps de calcul.

### 1.1.3 Conclusion

Un nombre de Reynolds par mètre typique pour un avion de transport est de  $5 \times 10^6$ . A ces nombres de Reynolds, l'écoulement peut être considéré comme pleinement turbulent. Les configurations industrielles sont maillées avec plusieurs millions de points. Le coût de calcul du modèle de turbulence doit être aussi faible que possible, alors un modèle de turbulence à une seule équation sera préférable à un modèle à deux équations. Le modèle de Spalart-Allmaras est largement diffusé industriellement à cause de sa robustesse, de sa fiabilité et de son coût modéré en temps de calcul.

Pour toutes ces raisons, et après avoir étudié des cas avec les équations d'Euler où seulement les vecteurs des densités du flux visqueux sont enlevés à l'équation 1.1, nous utiliserons une approche RANS avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras.

## 1.2 Méthode Numérique

### 1.2.1 Résolution des équations de Navier-Stokes - RANS

Les simulations numériques ont été effectuées à l'aide du code de calcul numérique elsA [17]. Ce code a d'abord été développé par l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques). La discrétisation des équations de Navier-Stokes se fait par une formulation volume fini. La formulation volume fini dans la cadre de la CFD fut introduite par Mc Donald [43]. L'utilisation de cette formulation pour les lois de conservation nous assure la conservation des quantités fondamentales comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. De plus, la formulation volume fini peut s'appliquer facilement à des géométries complexes. Explicitons cette formulation.

Les équations de Navier-Stokes sous leurs formes conservatives peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \mathcal{F} = 0 \quad (1.26)$$

La formulation volume fini est appliquée à l'équation 1.26 par intégration sur le domaine de calcul  $\Omega$  que l'on peut voir sur la figure 1.1 :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \text{div} \mathcal{F} dV = 0 \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{F} = (f - f_v, g - g_v, h - h_v)$  est le tenseur des densités de flux. Le théorème de la divergence nous amène à :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} \mathcal{F} \cdot n dS = 0 \quad (1.28)$$

où  $n$  est le vecteur normal pointant vers l'extérieur du domaine  $\Omega$  délimité par  $\partial\Omega$  (voir figure 1.1).

Supposons maintenant que  $\Omega$  est une cellule  $(i, j, k)$  comme montrée sur la figure 1.2, l'équation 1.28 peut alors s'écrire comme suit :

$$V_{i,j,k} \frac{\partial W_{i,j,k}}{\partial t} + R_{i,j,k} = 0 \quad (1.29)$$

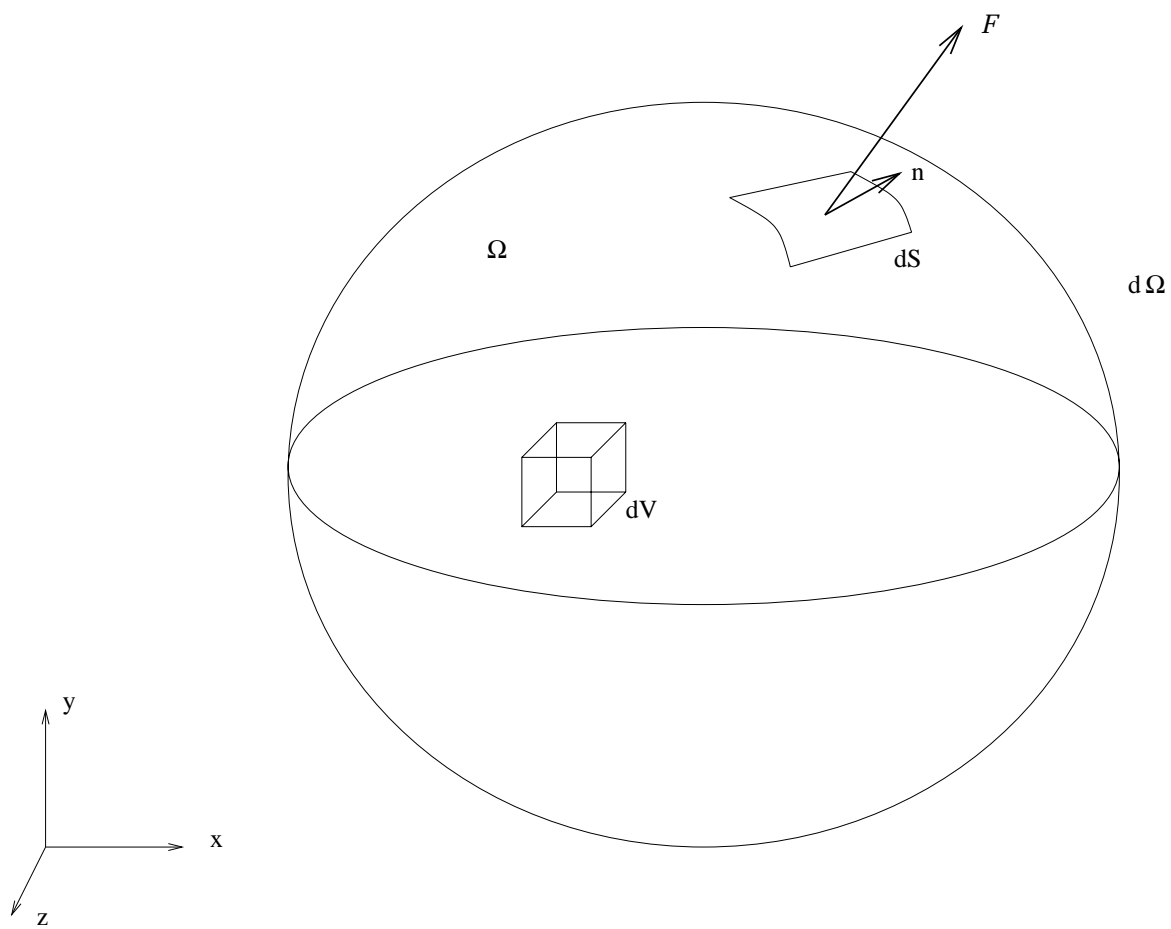
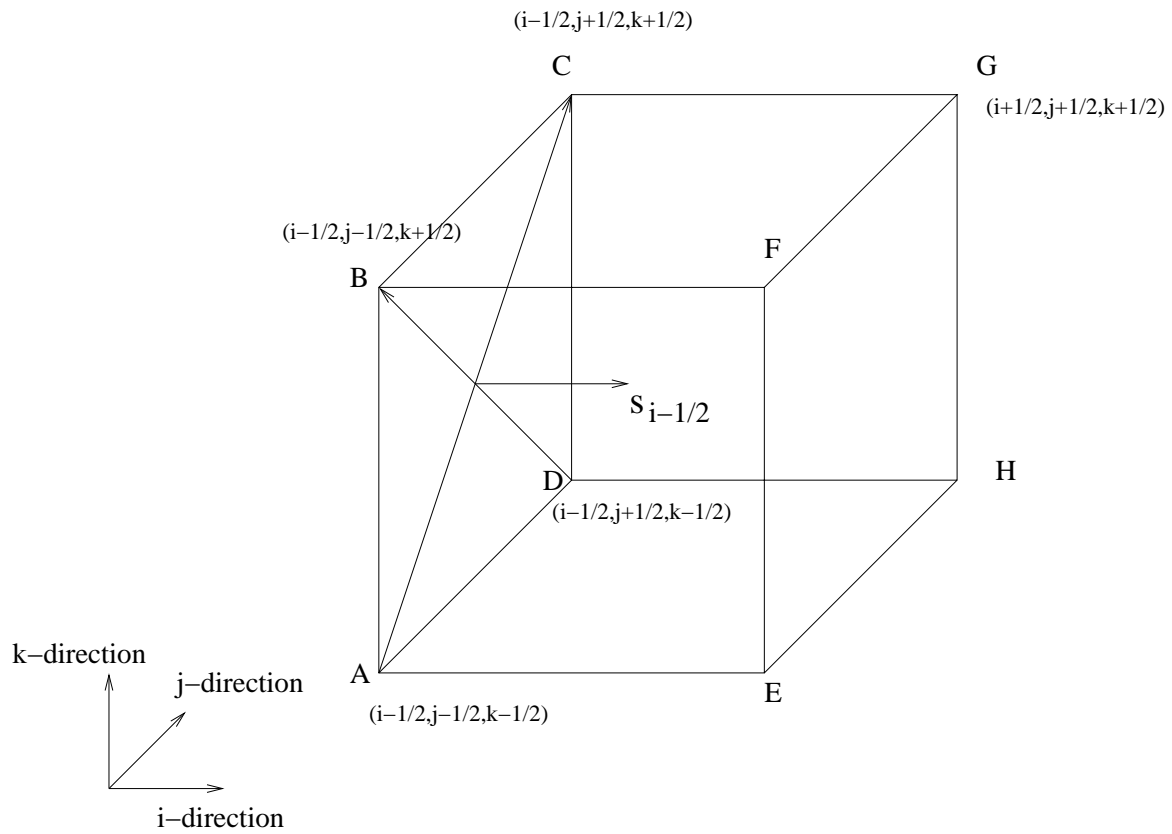


FIG. 1.1 – Domaine de calcul

FIG. 1.2 – Notation pour une cellule  $(i, j, k)$  en volume fini

où  $W_{i,j,k}$  est le vecteur d'état moyen, supposé constant dans la cellule  $(i, j, k)$ ,  $V_{i,j,k}$  est le volume de la cellule et  $R_{i,j,k}$  est le bilan de flux entrant et sortant de la cellule :

$$R_{i,j,k} = F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k} + F_{i,j+1/2,k} - F_{i,j-1/2,k} + F_{i,j,k+1/2} - F_{i,j,k-1/2} \quad (1.30)$$

avec  $F_{i-1/2,j,k}$  est le flux des quantités discrétisées normal défini comme le flux orienté par rapport à la direction topologique  $i$  à travers la facette ABCD (fig. 1.2). Le flux sur cette facette peut être déterminé comme l'intégrale du produit scalaire entre le tenseur des densités de flux  $\mathcal{F}$  et la normale unitaire  $n$  sur la surface ABCD. Le flux numérique peut alors être estimé par :

$$F_{i-1/2,j,k} = \int_{ABCD} \mathcal{F} \cdot (-n) dS \approx \mathcal{F}_{ABCD} \cdot \int_{ABCD} (-n) dS \quad (1.31)$$

où l'intégrale de surface dans le membre de droite correspond au vecteur surface  $s_{ABCD} = (s_x, s_y, s_z)^T$ . Pour pouvoir bien estimer le bilan de flux  $R_{i,j,k}$  qui est aussi appelé résidu explicite dans le code CFD elsA, le tenseur de flux  $\mathcal{F}_{ABCD}$  dans l'équation 1.31 doit être calculé sur la surface de la cellule.

Le terme  $\oint_{\partial\Omega} \mathcal{F} \cdot n dS$  de l'équation 1.28 peut être décomposé en :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{F}_c \cdot n dS - \oint_{\partial\Omega} \mathcal{F}_v \cdot n dS \quad (1.32)$$

Le premier terme représente le tenseur des flux convectif et le second le tenseur des flux visqueux. Sur les maillages structurés, de nombreux schémas ont été développés pour obtenir une bonne approximation des flux convectifs.

Pour la discrétisation spatiale, nous allons utiliser dans le cadre de cette thèse le schéma décentré de Roe [59]. Pour le présenter succinctement, le flux numérique pour le schéma de Roe sur la face  $i + 1/2$  est donné par :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}(W_{i+1/2}^L) + \mathcal{F}(W_{i+1/2}^R)] \cdot s_{i+1/2} - \frac{1}{2} |A(W_{i+1/2}^L, W_{i+1/2}^R)| (W_{i+1/2}^R - W_{i+1/2}^L) \quad (1.33)$$

où  $A$  est la matrice de Roe et  $W_{i+1/2}^L$  et  $W_{i+1/2}^R$  sont les variables conservatives extrapolées sur chaque côté de la facette ( $L$  extrapolation à gauche et  $R$  extrapolation à droite). Ces valeurs sont extrapolées par un schéma décentré avec utilisation d'un limiteur tel minmod, Van Leer, Superbee et Van Albada [1]. Le fait de calculer par la suite le vecteur adjoint pour notre application nous impose de prendre un limiteur dérivable. De ce fait le limiteur utilisé sera celui de Van Albada car il est complètement dérivable.

Le schéma de résolution numérique temporel choisi pour la résolution des équations est un schéma implicite du premier ordre. Ce choix est conditionné par le fait que l'on a un gain important pour la convergence des écoulements stationnaires par rapport à un schéma explicite. L'équation obtenue après la discrétisation spatiale en volume fini est :

$$V \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} + \theta R(W^{n+1}) + (1 - \theta) R(W^n) = 0 \quad (1.34)$$

où  $V$  est le volume de la cellule,  $\Delta t$  est le pas de temps et  $\theta$  pour un schéma implicite est égale à 1.

Comme le résidu  $R(W^{n+1})$  à l'instant  $n + 1$  n'est pas connu, on fait une linéarisation du résidu en fonction du temps :

$$R^{n+1} = R^n + \left( \frac{\partial R}{\partial W} \right)_n \Delta W^n + O(\Delta t^2) \quad (1.35)$$

où  $\Delta W^n = W^{n+1} - W^n$ .

On introduit l'équation 1.35 dans l'équation 1.34 et on obtient :

$$\left( \frac{V}{\Delta t} I + \left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]_n \right) \Delta W^n = -R(W^n) \quad (1.36)$$

où  $I$  est la matrice identité.

La résolution à l'instant  $n$  de cette équation sera faite par la méthode LU-SSOR (Symetric Successive Over Relaxation).

## 1.2.2 Equations adjointes discrètes

### 1.2.2.1 Introduction de l'équation adjointe discrète

Lors d'un processus d'optimisation de forme aérodynamique, on souhaite diminuer une fonction objectif  $f(x_d, W)$ , typiquement la traînée, qui va dépendre de variables de décision  $x_d$  influant sur la forme aérodynamique, et du vecteur d'état  $W$ . Il existe différentes façons de résoudre ce problème, mais la stratégie choisie par Airbus est basée vers une méthode de résolution par l'état adjoint [20, 44, 45]. Cette résolution convient bien aux optimisations comportant un nombre élevé de paramètres comme les bosses qui déforment une voilure (de l'ordre du millier de paramètres) alors que le nombre de fonctions objectifs (traînée, portance, ...) et de contraintes (volumes, portance, ...) est faible.

Nous allons illustrer cette méthode par une approche Lagrangienne du problème. Le but est de minimiser une fonction objectif  $f$  sous la contrainte d'égalité  $R(W, x_d) = 0$ . La fonction Lagrangienne se définit alors par :

$$L(x_d, W) = f(x_d, W) + \lambda^T R(x_d, W) \quad (1.37)$$

où  $\lambda$  représente le multiplicateur de Lagrange, ainsi que le vecteur adjoint.

Une condition nécessaire pour que le minimum soit atteint est que la dérivée de  $L$  par rapport au vecteur des variables de décision  $x_d$  soit nulle :

$$\frac{dL}{dx_d} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_d} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial x_d} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial W} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial W} \right) \frac{\partial W}{\partial x_d} = 0 \quad (1.38)$$

Pour ne pas calculer le terme  $\frac{\partial W}{\partial x_d}$ , on choisit alors  $\lambda$  tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial W} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial W} = 0 \quad (1.39)$$

ou encore :

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]^T \lambda = - \left[ \frac{\partial f}{\partial W} \right]^T \quad (1.40)$$

c'est l'équation adjointe à  $R(x_d, W)$ . Le vecteur adjoint représente la sensibilité du résidu par rapport à la fonction objectif considérée.

L'expression finale du Lagrangien est alors :

$$\frac{dL}{dx_d} = \frac{\partial f}{\partial x_d} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial x_d} \quad (1.41)$$

L'équation 1.41 est résolue par une méthode de Newton. Ce qui nous intéresse ici est la résolution de l'état adjoint, pour la suite de la résolution du problème d'optimisation, vous trouverez plus de détails dans les références citées plus haut.

### 1.2.2.2 Résolution numérique de l'équation adjointe discrète

Dans l'équation 1.40, nous pouvons discerner deux termes à résoudre : le terme de gauche  $\frac{\partial R}{\partial W}$  et le terme de droite  $\frac{\partial f}{\partial W}$ . Commençons par le terme de droite.

- $\frac{\partial f}{\partial W}$  représente la dérivée de la fonction objectif par rapport aux variables conservatives. Dans la chaîne d'optimisation, cette quantité va être calculée analytiquement par un outil extérieur à elsA, l'outil de post-traitement traînée d'Airbus développé par l'ONERA, FFD41 [16]. Des exemples de calcul analytique de cette quantité sont donnés dans les références [20] et [44].
- $\frac{\partial R}{\partial W}$  correspond à la sensibilité des équations de Navier-Stokes par rapport aux variables conservatives. Il est calculable analytiquement mais il est très lié à la méthode de résolution des équations directes. De ce fait, le mode de résolution des équations directes (section 1.2.1) n'a pas été choisi que pour sa robustesse mais aussi parce que le terme  $\frac{\partial R}{\partial W}$  est calculé dans la résolution implicite des équations. Le développement du calcul numérique de ce terme a été effectué par une collaboration entre Airbus et l'ONERA.

Maintenant que l'on a les deux termes principaux, il faut inverser la matrice  $\left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]^T$  pour chaque cellule du maillage. Le schéma utilisé pour effectuer cette inversion est un schéma incrémental. A chaque pas de l'incrément  $n$ , le système à résoudre est alors le suivant :

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]^T \Delta \lambda^n = - \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial W} \right]^T + \left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]^T \lambda^n \right) \quad (1.42)$$

avec  $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta \lambda^n$

L'avantage de ce schéma est que l'on peut considérer une matrice approchée  $\left[ \frac{\partial R}{\partial W} \right]^{*T}$  dans le membre de gauche pour rendre la matrice à diagonale dominante. Ceci nous garantit la convergence et la stabilité de la résolution du système. L'équation 1.40 est bien résolue car le critère de convergence est  $\Delta \lambda^n$  qui tend vers zéro. L'équation sera résolue par la méthode LU-SSOR.

## 1.2.3 Conclusion

L'implémentation de ces méthodes numériques à travers une étroite collaboration entre l'ONERA et Airbus, a permis d'obtenir un code de calcul pour la résolution des équations

directes et adjointes stable, précis et applicable à des configurations industrielles. Ces outils représentent les prérequis indispensables à l'élaboration d'un logiciel de calcul de la correction et de l'erreur basé sur l'opérateur adjoint.



# Chapitre 2

## Correction, erreur et adaptation de maillage

Le but de ce chapitre est de montrer les différentes façons d'améliorer les résultats issus du calculs numériques. Nous pouvons dégager deux principaux axes d'améliorations. Le premier est de travailler directement sur le maillage que l'on a étudié et d'extrapoler ses résultats ou encore d'éliminer ou de réduire les zones d'erreur dans le maillage. Ce premier axe pour améliorer les résultats de calcul CFD sera composé de la correction de Richardson, la correction basée sur l'opérateur adjoint et du traitement de la trainée par l'approche champ lointain. Le deuxième axe consistera à modifier le maillage en l'enrichissant ou en bougeant les noeuds le composant. Une étape préliminaire à ce deuxième axe sera l'élaboration d'un senseur<sup>1</sup> (ou erreur) pour connaître les zones d'intérêt du maillage.

### 2.1 Introduction

Dans cette section d'introduction au chapitre, nous allons voir les méthodes usuellement utilisées pour ces différents thèmes. Dans un premier temps, l'amélioration des coefficients aérodynamiques par utilisation de plusieurs résultats CFD, sera exposée. Dans un deuxième temps, les méthodes de calcul de senseur utilisées dans le code de CFD elsA pour adapter le maillage seront développées.

#### 2.1.1 Correction de coefficients aérodynamiques

Le but d'une correction de coefficient aérodynamique est de pouvoir estimer le résultat d'un calcul quasi parfait qui donnerait au mieux la solution continue du problème et au pire la meilleure des solution sur un maillage très fin. Ceci demande un investissement énorme ou impossible en terme temps de calcul par rapport au maillage considéré. Les méthodes développées sont basées sur des méthodes asymptotiques. Nous supposerons aussi une connaissance *a priori* de la convergence de la solution en maillage. Deux méthodes communément utilisées vont être exposées. La méthode de correction de coefficient aérodynamique avec l'opérateur adjoint sera présentée dans la section 2.2.1.

---

<sup>1</sup>Un senseur est défini comme un champ volumique indiquant les zones à raffiner ou à déraffiner.

### 2.1.1.1 La correction de Richardson

#### La correction de Richardson [68]

Considérons deux maillages ayant comme longueurs caractéristiques  $h_1$  et  $h_2$  ( $h_1 > h_2$ ). En admettant que le coefficient aérodynamique converge comme l'ordre de discrétisation ( $p$ ) de la résolution spatiale du problème, nous pouvons alors faire un développement limité de notre coefficient aérodynamique par rapport à la longueur caractéristique :

$$f = f(h_1) + h_1^p C + O(h_1^{p+1}) \quad (2.1)$$

$$f = f(h_2) + h_2^p C + O(h_2^{p+1}) \quad (2.2)$$

$f$  est le coefficient aérodynamique de la solution continue,  $f(h_1)$  et  $f(h_2)$  sont ceux sur les maillages 1 et 2, et  $C$  est le coefficient du premier terme du développement. En négligeant le terme d'ordre supérieur à  $p$  et en éliminant  $C$  nous obtenons une approximation de notre coefficient aérodynamique :

$$f \approx \frac{f(h_1) - f(h_2) \frac{h_1^p}{h_2^p}}{1 - \frac{h_1^p}{h_2^p}} \quad (2.3)$$

Dans notre cas,  $p$  sera égal à 2 et  $h_1$  sera la moitié de  $h_2$ . Cette correction peut être utilisée directement sur des résultats de calcul ou sinon, comme dans la référence [68], à partir de résultats de calcul déjà corrigés par la correction adjointe.

#### La correction de Richardson généralisée [6]

##### Calcul de l'ordre de discrétisation

En règle générale, l'ordre de discrétisation  $p$  de notre code n'est que théorique. En pratique et surtout en fonction du maillage, il ne vaut pas la valeur que l'on a estimée. Pour résoudre ce problème, Baker [6] propose d'estimer la précision du schéma en utilisant le développement limité précédent avec trois maillages différents de longueurs caractéristiques  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  ( $h_1 > h_2 > h_3 > 0$ ). En utilisant les notations du paragraphe précédent, on obtient alors :

$$f = f(h_1) + h_1^p C + O(h_1^{p+1}) \quad (2.4)$$

$$f = f(h_2) + h_2^p C + O(h_2^{p+1}) \quad (2.5)$$

$$f = f(h_3) + h_3^p C + O(h_3^{p+1}) \quad (2.6)$$

On peut alors éliminer  $f$  et  $C$  :

$$\frac{f(h_3) - f(h_2)}{f(h_2) - f(h_1)} = \frac{h_2^p - h_3^p}{h_1^p - h_2^p} \quad (2.7)$$

Si le raffinement entre les maillages successifs sont les mêmes (c'est à dire  $h_3 = r h_2$  et  $h_2 = r h_1$ ), alors on en déduit la précision du schéma [58] de l'équation 2.7 :

$$p = \frac{\ln \left( \frac{f(h_3) - f(h_2)}{f(h_2) - f(h_1)} \right)}{\ln r} \quad (2.8)$$

Il y a bien sûr certaines conditions [6] que doivent vérifier les différents  $f(h_i)$  pour que cette méthode puisse donner des résultats convenables, par exemple une monotonie de la convergence en maillage.

S'il n'y a pas de rapport simple entre les différentes longueurs caractéristiques, il suffit pour calculer  $p$  de résoudre l'équation suivante :

$$(f(h_3) - f(h_2)) h_1^p + (f(h_1) - f(h_3)) h_2^p + (f(h_2) - f(h_1)) h_3^p = 0 \quad (2.9)$$

Dans ce cas là, la longueur caractéristique sera déterminée comme la racine cubique (en 3 dimensions) du rapport entre le volume  $V$  du domaine de calcul divisé par le nombre d'éléments  $N_i$  :  $h_i = \sqrt[3]{\frac{V}{N_i}}$ . Etant donné que le volume du domaine de calcul est le même pour tous les calculs et que l'on fait des rapports de longueurs caractéristiques, on peut alors simplifier la longueur caractéristique en calculant  $h_i = \sqrt[3]{\frac{1}{N_i}}$ .

### Calcul de la correction

Comme précédemment, on peut calculer une erreur  $E_3$  et ainsi estimer la fonction continue en calculant :

$$E_3 = \frac{f(h_3) - f(h_2)}{\left(\frac{h_2}{h_3}\right)^p - 1}, \quad f \approx f(h_3) + E_3 \quad (2.10)$$

A partir de cette expression, on peut estimer le nombre de points de maillage suffisant pour avoir le coefficient aérodynamique avec une erreur désirée que l'on note  $E_T$ . La longueur caractéristique de ce maillage sera alors  $h_T \approx h_3 \sqrt[p]{\frac{E_T}{E_3}}$ . On peut alors en déduire le nombre de points nécessaire ( $N_T$ ) en 3 dimensions :  $N_T \approx N_3 \left(\frac{E_3}{E_T}\right)^{\frac{p}{3}}$ . Le nombre de points théorique calculé est à prendre à titre indicatif.

Pour une bonne application de l'extrapolation de Richardson, les maillages utilisés doivent se trouver assez proche de la convergence asymptotique de la solution dite "idéale". Un indice pour voir si l'on est loin de cette convergence est de trouver un ordre de discrétisation inférieur à  $\frac{2}{3}p$ . Si l'on se trouve dans cette situation, on peut légitimement suspecter un problème soit dans la qualité du maillage soit dans le solveur.

#### 2.1.1.2 La correction quadratique [48]

Pour avoir une évaluation plus précise des coefficients aérodynamique ( $f(h)$ ), on suppose qu'ils dépendent quadratiquement de la taille caractéristique du maillage ( $h$ ) et de certains coefficients ( $c_k$ ) qui peuvent s'écrire comme suit :

$$f(h) = f(h=0) + c_1 h + c_2 h^2 \quad (2.11)$$

On rend les tailles caractéristiques des maillages sans dimensions en prenant le premier maillage comme référence. On prend alors  $h = 1$  pour le maillage le plus fin (en valeur adimensionnelle).  $h = 0$  représente la solution *a priori* continue que l'on recherche. Etant donné

que nous avons trois inconnues, il nous faut trois équations et donc trois maillages différents. Dans notre cas les valeurs de  $h$  seront 1, 2 et 4 pour les maillages successifs car nous faisons un raffinement isotrope du maillage.

Cette méthode est extrêmement restrictive car ces hypothèses de convergence quadratique en fonction du maillage pour des configurations industrielles ne sont que très rarement respectées. Elle ne sera alors réservée qu'à certains cas précis dont nos applications ne font pas parties.

### 2.1.2 Calcul de l'erreur

Notre but va être de trouver un moyen de calculer l'erreur de discrétisation. Cette erreur nous empêche de résoudre complètement et exactement les équations modélisant notre écoulement. Dans l'absolu, cette erreur est la différence entre la solution des nos équations pour un domaine continu et la solution calculée avec un domaine discrétisé. Il nous est impossible pour des cas complexes de pouvoir calculer exactement cette erreur car il nous faudrait la solution continue. Les différentes manières d'évaluer l'erreur *a posteriori* sont surtout basées sur le comportement d'une valeur "représentative" de l'écoulement par rapport au maillage avec lequel elle est calculée. On peut alors estimer qu'une grande variation d'une grandeur avec peu de point pour la représenter pourra engendrer une erreur assez élevée. Pour terminer, le choix de l'erreur à calculer doit être étroitement lié à la grandeur que l'on cherche à mieux modéliser.

Nous allons présenter ici différentes erreurs qui sont déjà implémentées dans le code de CFD elsA.

#### 2.1.2.1 L'erreur de Richardson

Cette erreur part d'un développement en série de Taylor [31, 35]. Le but est de comparer deux solutions de calcul numérique, l'une calculée sur un maillage grossier et une autre sur un maillage fin. Cette méthode se combine assez naturellement avec la technique multigrille d'accélération de convergence. On obtient alors sur chaque maillage le développement suivant :

$$\phi(x) = \phi(x, h_1) + h_1^p C(x) + O(x, h_1^q) \quad (2.12)$$

$$\phi(x) = \phi(x, h_2) + h_2^p C(x) + O(x, h_2^q) \quad (2.13)$$

avec  $h_1$  la longueur caractéristique du maillage grossier,  $h_2$  celle du maillage fin,  $\phi(x, h_i)$  une grandeur calculée (pression, vitesse, ...) sur le maillage de longueur caractéristique  $h_i$ ,  $C(x)$  le coefficient du premier terme du développement et  $p$  l'ordre de discrétisation de la résolution spatiale. Une des hypothèses importantes de cette approche est que  $C(x)$  est le même dans les deux équations. A partir des équations 2.12 et 2.13, on peut en déduire  $C(x)$  :

$$C(x) = \frac{\phi(x, h_2) - \phi(x, h_1)}{h_1^p - h_2^p} \quad (2.14)$$

A l'aide de cette expression, l'erreur de Richardson qui est la différence entre la solution continue et la solution calculée sur le maillage fin s'écrit :

$$\boxed{\varepsilon(i) = |\phi(x) - \phi(i, h_2)| = \frac{|\phi(i, h_2) - \phi(i, h_1)|}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p - 1}} \quad (2.15)$$

Dans le cadre de cette thèse, l'ordre de discrétisation en espace est  $p = 2$ . Cette erreur est particulièrement représentative de l'erreur de discrétisation si l'on se trouve proche de la convergence en maillage et que l'on dispose de 2 maillages assez proche topologiquement. Si on utilise le multigrille pour la calculer, on a obligatoirement la même topologie et un rapport  $h_1$  sur  $h_2$  assez simple.

### 2.1.2.2 L'erreur basée sur le résidu

Dans cette partie, nous allons utiliser le résidu explicite ( $R(W)$ ) que l'on a défini dans la partie 1.2.1. Grâce au résidu considéré comme une erreur, on peut connaître les zones où la discrétisation n'est pas suffisante pour bien rendre compte de la variation de la grandeur choisie  $\phi$ . Le résidu peut être utilisé comme tel, cependant pour avoir une certaine homogénéité avec l'erreur de Richardson, il doit être ramené à la même unité. En effet l'unité du résidu est  $[\phi][L^3][T^{-1}]$  alors que l'unité de l'erreur de Richardson est  $[\phi]$ . De ce fait, le volume local de la cellule sera choisi comme volume caractéristique et une échelle de temps caractéristique sera :

$$T = \frac{h}{U} \quad (2.16)$$

où  $h$  est la taille caractéristique de la cellule (volume divisé par l'aire) et  $U$  est la vitesse moyenne.

L'expression de cette erreur est alors :

$$\varepsilon(i) = \frac{R(i) \times T(i)}{V(i)} \quad (2.17)$$

où  $R(i)$  est le résidu explicite local,  $T(i)$  est le temps caractéristique,  $V(i)$  le volume de la cellule et  $i$  est l'indice de la cellule du maillage.

### 2.1.2.3 L'erreur basée sur l'Hessien

Explicitons ce senseur en deux dimensions. La matrice Hessienne d'une grandeur volumique  $\phi$  s'écrit :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$\phi$  est une grandeur extraite de la solution numérique, souvent c'est le nombre de Mach local qui est utilisé.

On va chercher à créer une matrice définie positive pour fabriquer une métrique Riemannienne. Pour cela il faut tout d'abord diagonaliser cette matrice symétrique et rendre ses valeurs propres positives :

$$H = R \Lambda R^T \quad (2.19)$$

où  $\Lambda$  est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $H$  et  $R$  est la matrice contenant les vecteurs propres.

Pour obtenir une matrice définie positive, il suffit alors de prendre la valeur absolue des valeurs propres :

$$M = R|\Lambda|R^T \quad (2.20)$$

On peut alors transformer l'espace réel dans un espace Riemannien. En particulier, les tailles des arêtes des mailles de l'espace réel sont évaluées dans l'espace de Riemann et cette longueur est interprétée comme une erreur dans l'espace réel. Pour chaque arête de longueur  $\ell$ , l'erreur se calcule par l'expression :

$$\varepsilon(i) = \int_0^\ell \sqrt{x^T M(s)x} ds \quad (2.21)$$

où  $x$  est le vecteur unitaire de l'arête et  $s$  la coordonnée curvilinéaire.

Beaucoup d'études ont été faites sur ce senseur surtout pour des maillages non-structurés (par exemple [2, 18, 23, 29, 41, 42, 56, 62]). La matrice Hessienne peut aussi nous fournir des renseignements pour orienter et étirer la cellule. Venditti et Darmofal [70] utilisent cette propriété dans leur processus d'adaptation de maillage.

## 2.2 Correction et erreur basées sur l'opérateur adjoint

Après avoir passé en revue les différentes corrections et erreur communément utilisées, nous allons nous focaliser sur la théorie de la correction et de l'erreur calculées à partir de l'opérateur adjoint. Par abus de langage, nous appellerons la correction et l'erreur basées sur l'opérateur adjoint : correction et erreur adjointes.

Les corrections et erreurs adjointes ont d'abord été développées dans la théorie continue par Pierce et Giles [25–28, 52, 53] pour des fluides non-visqueux en une dimension. Cette méthode fut par la suite adaptée pour les équations discrètes en une dimension pour des fluides non-visqueux par Venditti et Darmofal [66, 67]. Ensuite elle fut adaptée pour les cas bidimensionnels dans un écoulement compressible non-visqueux [68] et visqueux [69]. Park a continué avec des applications en trois dimensions pour les fluides visqueux et non-visqueux [49, 50]. Sur ce domaine d'autres articles et thèse ont pris la suite [7, 8, 36–38]. Dans tous ces articles, la démarche a toujours été de calculer une correction sur une fonction objectif venant d'une intégration surfacique classique comme la portance ou la traînée et ensuite d'adapter le maillage non-structuré à partir de l'erreur adjointe. Cependant une certaine originalité a été introduite dernièrement par Park avec l'utilisation d'une fonction objectif moins conventionnelle [40]. En effet pour adapter le maillage sur une configuration d'un avion de transport supersonique, Park a utilisé l'intégration de la pression sur un cône de révolution entourant l'avion. Par ce biais, il a obtenu une très bonne adaptation des chocs provoqués par l'engin supersonique.

Ces méthodes ont été aussi développées dans un contexte plus académique pour les éléments finis en particulier par Becker et Rannacher [10, 11] et pour la méthode de Galerkin discontinue notamment par Hartmann [32, 33].

Les **originalités d'utilisation** de la correction et de l'erreur basées sur l'opérateur adjoint sont pour ce tracail de thèse :

- Le calcul sur des **maillages structurés**.
- L'utilisation de la correction basée sur l'opérateur adjoint à des **états successifs de convergence**.

- L'utilisation sur des **nouvelles fonctions objectifs** issues notamment de l'approche champ lointain de la traînée.
- L'application à des configurations et des conditions de vol utilisées dans l'**industrie aéronautique**.

### 2.2.1 Théorie de la correction adjointe discrète

La démarche pour obtenir la correction et l'erreur basées sur l'adjoint est inspirée de la référence [70]. Soient deux maillages structurés, un grossier avec comme longueur caractéristique  $H$  et un autre fin ayant la même topologie mais avec une longueur caractéristique  $h$  ( $h < H$ ). On peut postuler que la solution calculée sur le maillage fin devrait donner un résultat plus précis qu'une solution issue du maillage plus grossier. Cependant, le calcul sur le maillage fin prendra plus de temps que celui sur le maillage grossier. Notre but est d'avoir une bonne estimation du coefficient aérodynamique  $f_h(W_h)$  (portance, traînée, ...) du maillage fin (indice  $h$ ) sans effectuer réellement le calcul avec ce maillage.

#### Correction calculée sur le maillage fin

Considérons le développement en série de Taylor au premier ordre de la quantité  $f_h(W_h)$  :

$$f_h(W_h) = f_h(\widetilde{W}_h) + \left. \frac{\partial f_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} [W_h - \widetilde{W}_h] + \dots \quad (2.22)$$

Dans cette équation 2.22,  $W_h$  est la solution exacte du vecteur d'état sur le maillage fin et  $\widetilde{W}_h$  est une solution approximée (solution perturbée).  $[W_h - \widetilde{W}_h]$  représente l'erreur sur le vecteur d'état. Pour exprimer cette erreur, nous allons l'extraire du développement en série de Taylor du résidu des équations d'Euler  $R_h$  :

$$R_h(W_h) = R_h(\widetilde{W}_h) + \left. \frac{\partial R_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} [W_h - \widetilde{W}_h] + \dots \quad (2.23)$$

Vu que le résidu de la solution convergée sur le maillage fin est supposé nul, l'erreur  $[W_h - \widetilde{W}_h]$  est exprimée par :

$$W_h - \widetilde{W}_h \approx - \left[ \left. \frac{\partial R_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} \right]^{-1} R_h(\widetilde{W}_h) \quad (2.24)$$

En substituant l'expression 2.24 dans l'équation 2.22 on obtient :

$$f_h(W_h) \approx f_h(\widetilde{W}_h) - \left. \frac{\partial f_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} \left[ \left. \frac{\partial R_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} \right]^{-1} R_h(\widetilde{W}_h) \quad (2.25)$$

Soit  $\lambda_h|_{\widetilde{W}_h}$ , le vecteur adjoint calculé sur la solution perturbée du maillage fin. Ce vecteur satisfait l'équation discrète adjointe :

$$\left[ \left. \frac{\partial R_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} \right]^T \lambda_h|_{\widetilde{W}_h} = - \left[ \left. \frac{\partial f_h}{\partial W_h} \right|_{\widetilde{W}_h} \right]^T \quad (2.26)$$

Finalement, la correction idéale pour un coefficient aérodynamique est

$\left[\lambda_h|_{\widetilde{W}_h}\right]^T R_h(\widetilde{W}_h)$  et l'équation 2.22 devient :

$$f_h(W_h) = f_h(\widetilde{W}_h) + \left[\lambda_h|_{\widetilde{W}_h}\right]^T R_h(\widetilde{W}_h) \quad (2.27)$$

### Correction calculée à partir du maillage grossier

Pour une approche commune, nous allons considérer que la solution perturbée est une interpolation ( $\mathbf{L}_h^H$ ) de la solution issue du maillage grossier sur le maillage fin  $\widetilde{W}_h = \mathbf{L}_h^H W_H$ .  $\mathbf{L}_h^H \lambda_H$  est l'interpolation du vecteur adjoint calculé sur le maillage grossier. Pour ne pas dépendre de grandeurs calculées sur le maillage fin, une correction calculable  $e_{com}$  et une erreur restante  $e_{rem}$  sont introduites en ajoutant et soustrayant dans le membre de droite de l'équation 2.27 le même terme avec le vecteur adjoint interpolé :

$$\begin{aligned} f_h(W_h) - f_h(\mathbf{L}_h^H W_H) &= \underbrace{\left[\mathbf{L}_h^H \lambda_H\right]^T R_h(\mathbf{L}_h^H W_H)}_{\text{Correction calculable}} \\ &\quad + \underbrace{\left[\lambda_h|_{\widetilde{W}_h} - \mathbf{L}_h^H \lambda_H\right]^T R_h(\mathbf{L}_h^H W_H)}_{\text{Erreur restante}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le fait de pouvoir calculer la correction avec l'interpolation du vecteur adjoint implique que le maillage grossier soit assez fin pour pouvoir capturer l'essentiel des caractéristiques de l'écoulement. Dans le cas contraire, les expressions 2.22 et 2.23 ne sont plus valables et la théorie de la correction adjointe n'est plus applicable.

Muller et Giles [47] ont utilisé la correction calculable comme un terme d'erreur totale, négligeant l'erreur restante  $e_{rem}$ . De ce fait, une adaptation de maillage peut-être effectuée, mais on perd d'une part le rôle du terme correctif et d'autre part on ne connaît pas le poids du terme de l'erreur restante.

Sur la base des travaux de Venditti et Darmofal [69], une interpolation d'ordre plus élevé  $\mathbf{Q}_h^H$  est introduite sur le vecteur adjoint pour remplacer le terme  $\lambda_h|_{\widetilde{W}_h}$ .

Une erreur restante pertinente peut maintenant être exprimée avec des variables seulement issues du maillage grossier :

$$e_{rem} = \left[\mathbf{Q}_h^H \lambda_H - \mathbf{L}_h^H \lambda_H\right]^T R_h(\mathbf{L}_h^H W_H)$$

Par ce biais contrairement à d'autres méthodes qui tentent d'augmenter la précision sur la fonctionnelle elle-même, on essaie plutôt d'augmenter la précision du calcul de la correction. Bien sûr, c'est une grande approximation de remplacer  $\lambda_h|_{\widetilde{W}_h}$  par un vecteur interpolé. C'est pour cela que nous devons toujours avoir un regard critique sur nos résultats. L'erreur  $e_{rem}$  tendra vers zéro lorsque les interpolations d'ordres différents donneront le même résultat. Si une interpolation linéaire donne le même résultat qu'une interpolation d'ordre plus élevé, on peut supposer que le maillage est d'une assez grande finesse.

Les interpolations du vecteur d'état et du vecteur adjoint peuvent être différentes. Mais dans notre cas nous prendrons la même interpolation pour les deux quantités.



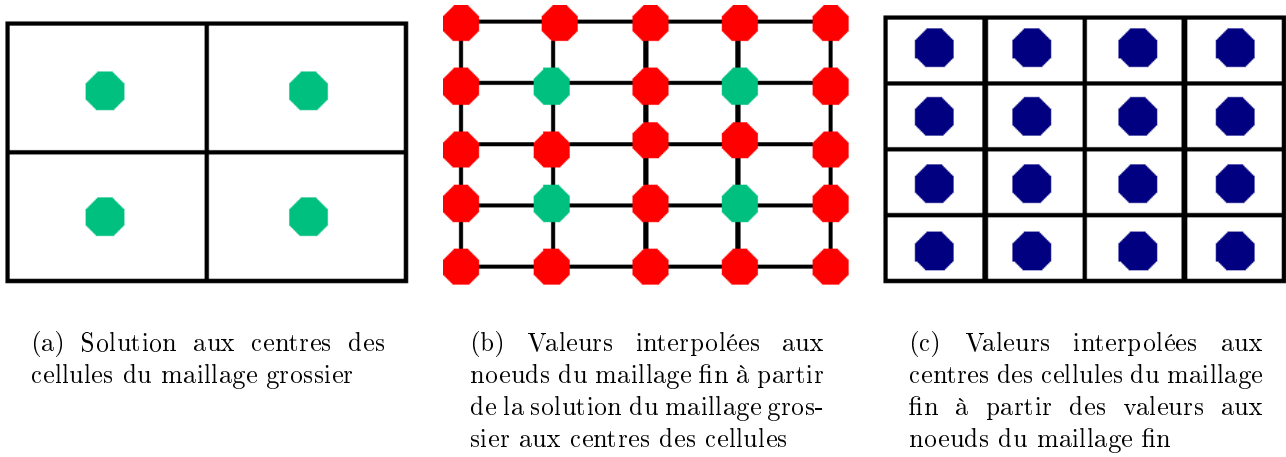


FIG. 2.1 – Procédure d'interpolation du maillage grossier au maillage fin

## 2.2.2 Interpolation

D'après les équations précédentes et surtout pour l'erreur restante, nous devons disposer au minimum de deux interpolations d'ordre différent. Ce que l'on entend par ordre d'interpolation est une référence aux interpolations par polynôme de degré différent. Dans les articles traitant de la correction adjointe, les interpolations qui sont utilisées en non-structuré, sont dans tous les cas une interpolation linéaire qui fait office d'interpolation d'ordre inférieur. Pour l'interpolation d'ordre supérieur, une interpolation avec une minimisation des moindres carrés est utilisée par Venditti [70] et une interpolation utilisant les gradients calculés à chaque extrémité de l'arête encadrant le point à interpoler est utilisée par Kim et al [38] et Park [51].

Pour notre cas, nous avons décidé de tirer partie du côté structuré du maillage pour faire une interpolation assez simple suivant les lignes du maillage fin (topologique). A partir des valeurs aux centres sur le maillage grossier (fig. 2.1(a)), nous pouvons obtenir par interpolation (linéaire ou cubique) les valeurs aux noeuds du maillage fin (fig. 2.1(b)). Ensuite il suffit de faire  $1/8$  en 3D et  $1/4$  en 2D des valeurs aux noeuds pour obtenir la valeur aux centres des cellules fines (fig. 2.1(c)). L'interpolation utilisée pourra être linéaire ou cubique.

### 2.2.2.1 Interpolation linéaire

Pour cette interpolation, une spline linéaire paraissait tout naturelle. La condition principale de cette interpolation est le fait que la droite que l'on va déterminer passe obligatoirement par les deux points utilisés.

Soient deux points  $x_1$  et  $x_2$ , la spline linéaire entre ces deux points s'écrit :

$$y(x) = ax + b \quad x \in [x_1, x_2] \quad (2.29)$$

avec

$$a = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = y(x_1) - ax_1$$

### 2.2.2.2 Interpolation cubique

Pour l'interpolation cubique, nous avons utilisé la spline d'Akima [3]. Le principe de base est de construire notre spline cubique morceau par morceau tout en gardant les propriétés de la spline. Pour cela nous devons tout d'abord déterminer précisément la pente d'une courbe en un point donné.

**Pente de la courbe :** Soient cinq points d'abscisse  $x_i$  et d'ordonnée  $y_i$  ( $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ ). Définissons  $a_i$  comme la pente entre 2 points consécutifs :

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$$

Akima a choisi de définir la pente au point 3 comme suit :

$$t_3 = \frac{|a_4 - a_3| a_2 + |a_2 - a_1| a_3}{|a_4 - a_3| + |a_2 - a_1|} \quad (2.30)$$

Nous voyons bien que si  $a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4$  la pente  $t_3$  n'est pas défini. Dans ce cas là, nous prendrons comme convention le fait que  $t_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$

**Interpolation entre deux points :** Nous allons construire une portion de courbe entre deux points consécutifs avec comme contraintes de passer par ces deux points et d'avoir la même pente que l'on a défini dans l'équation 2.30. Soient deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  avec comme pentes respectives  $t_1$  et  $t_2$ . Une façon d'écrire un polynôme d'ordre trois entre ces deux points est la suivante :

$$y = p_0 + p_1(x - x_1) + p_2(x - x_1)^2 + p_3(x - x_1)^3 \quad (2.31)$$

avec :

$$p_0 = y_1$$

$$p_1 = t_1$$

$$p_2 = \left[ \frac{3(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - 2t_1 - t_2 \right] \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$p_3 = \left[ t_1 + t_2 - \frac{2(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right] \frac{1}{(x_2 - x_1)^2}$$

Nous pouvons remarquer que cette interpolation nécessite la connaissance de six valeurs. Il faut trois valeurs à la droite du point à interpoler et trois à gauche. Akima propose que lorsqu'il nous manque des points pour effectuer l'interpolation, on crée les points manquants par une extrapolation quadratique. Cela peut arriver quand on arrive aux bords des blocs du maillage. Dans notre cas nous n'aurons pas à utiliser cette fonctionnalité de la spline d'Akima. En effet, nous avons toutes les informations nécessaires avec l'utilisation des cellules fictives et des valeurs aux interfaces des cellules.

### 2.2.3 Normalisation de l'erreur adjointe

L'erreur adjointe que l'on a déterminée avec  $e_{rem}$  ne peut pas être utilisée en tant que tel dans un processus d'adaptation de maillage. Tout d'abord il faut ramener l'erreur du centre des cellules du maillage fin (fig. 2.1(c)) au centre des cellules du maillage grossier (fig. 2.1(a)). Pour cela, nous sommes la valeur absolue de l'erreur des cellules fines ( $e_{rem}^h$ ) appartenant à chaque cellule grossière pour avoir l'erreur dans la cellule grossière ( $e_{rem}^H$ ) :

$$e_{rem}^H(i) = \sum_{j=1}^N |e_{rem}^h(l(i, j))| \quad (2.32)$$

avec  $l$  l'indice des cellules sur le maillage fin,  $i$  l'indice sur le maillage grossier,  $N = 4$  en deux dimensions et  $N = 8$  en trois dimensions. Dans la suite, nous ne considérerons plus que l'erreur sur le maillage grossier  $e_{rem}^H$  que nous noterons pour simplifier  $e_{rem}$ .

Ensuite, pour normaliser cette erreur, nous allons utiliser l'erreur sur tout le domaine de maillage, c'est à dire la somme de l'erreur sur tout le maillage ( $\varepsilon = \sum |e_{rem}(i)|$ ). L'utilisateur fixe un pourcentage ( $P\%$ ) de la correction. Si l'erreur  $\varepsilon$  est supérieure au pourcentage de la correction ( $\varepsilon > |e_{com}| P\%$ ), le maillage doit être adapté. Dans ce cas là on calcule l'erreur en chaque point par la formule :

$$\varepsilon(i) = \frac{N_{bcell}}{|e_{com}| P\%} |e_{rem}(i)| \quad (2.33)$$

avec  $N_{bcell}$  le nombre de cellules dans le maillage.

Par cette normalisation si  $\varepsilon(i)$  est supérieur à 1 alors la maille doit être adaptée. Pour finir on utilise un coefficient ( $\omega$ , typiquement 0,4) pour resserrer les échelles. L'erreur finale est alors :

$$\boxed{\varepsilon(i) = \left( \frac{N_{bcell}}{|e_{com}| P\%} |e_{rem}(i)| \right)^\omega} \quad (2.34)$$

Dans l'article [37], il est montré que des oscillations dues au calcul du résidu pouvaient conduire à une correction et une erreur adjointe moins performante. Pour éviter cela, un lissage du résidu avant de calculer la correction et l'erreur est proposé. Cependant dans l'article de l'année suivante [36], Kim et al affirment que cette technique n'est pas performante en fluide visqueux. Malgré tout, nous avons trouvé l'idée du lissage fort intéressante pour éliminer les pics créés par les oscillations dues au calcul du résidu sur l'erreur. De ce fait, avant de faire toute manipulation sur l'erreur, nous effectuons un lissage de l'erreur.

## 2.3 Décomposition de la traînée champ lointain

Dans le cadre de cette thèse, les coefficients aérodynamiques classiques comme la portance et la traînée issue d'une approche champ proche, vont être corrigés à l'aide de la correction adjointe. Contrairement à une approche champ proche, l'approche champ lointain propose d'intégrer volumiquement les zones de production physique de traînée comme le choc ou le sillage.

Dans la section suivante, nous exposerons comment utiliser la correction adjointe pour les composantes issues de l'approche traînée champ lointain.

### 2.3.1 Analyse phénoménologique de la décomposition de la traînée

#### 2.3.1.1 Décomposition de la traînée en champ proche

La traînée issue d'une approche champ proche peut être calculée par l'expression suivante :

$$D = D_p + D_f = \iint_{S_A} (p - p_\infty) n_x dS - \iint_{S_A} \vec{\tau}_x \cdot \vec{n} dS \quad (2.35)$$

avec  $\vec{\tau}_x = (\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$  et  $S_A$  la surface de l'objet considéré.

- La traînée de pression  $D_p$  est l'intégration des différences de pression sur la surface du corps.
- La traînée de frottement  $D_f$  provient du tenseur de cisaillement à la surface du corps dû à la viscosité.

#### 2.3.1.2 Décomposition de la traînée en champ lointain

La traînée peut être décomposée pour en accentuer ses diverses origine physique et numérique que l'on appelle ici composantes [4, 22, 65, 71, 72] :

$$\begin{aligned} D &= D_w + D_{vp} + D_{sp} + D_f + D_i \\ &= \underbrace{\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_{vw} dV}_{D_w + D_{vp} + D_{sp}} - \underbrace{\iint_{S_A} \vec{f}_{vw} \cdot \vec{n} dS}_{D_f} \\ &\quad + \underbrace{\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_i dV}_{D_i} - \iint_{S_A} \vec{f}_i \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec

$$\vec{f}_i = -\rho(u - u_\infty - \Delta\bar{u}) \vec{U} - (p - p_\infty) \vec{i} \quad (2.37)$$

$$\vec{f}_{vw} = -\rho\Delta\bar{u}\vec{U} + \vec{\tau}_x \quad (2.38)$$

et

$$\Delta\bar{u} = u_\infty \left( \sqrt{1 + \frac{2(h - h_\infty)}{u_\infty^2}} - \frac{2}{(\gamma - 1) M_\infty^2} \left( e^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{s-s_\infty}{r}} - 1 \right) - 1 \right) \quad (2.39)$$

avec  $\vec{U} = (u, v, w)$  le vecteur vitesse,  $h$  l'enthalpie massique d'arrêt,  $s$  l'entropie massique,  $V$  le volume du domaine de calcul,  $\vec{i}$  le vecteur unitaire dans le sens de l'écoulement à l'infini et les valeurs avec l'indice  $\infty$  sont celles prises à l'infini. L'obtention de ces formules est développée dans la référence [22].

1. La traînée de choc  $D_w$  est produite par la présence d'une onde de choc dans les régimes transsonique et supersonique. Elle est le résultat d'un phénomène thermodynamiquement irréversible (l'onde de choc) qui altère l'énergie interne du fluide.
2. La traînée de pression visqueuse  $D_{vp}$  est due au changement de la distribution de pression autour du corps par la présence de la couche limite. Les décollements et le sillage visqueux génèrent aussi de la traînée de pression visqueuse. Dans un fluide non-visqueux cette composante n'existe pas.

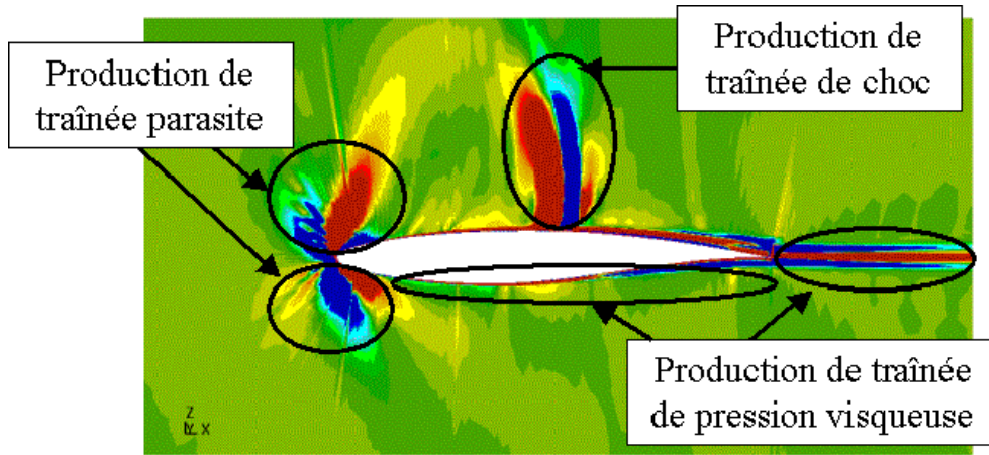


FIG. 2.2 – Production de la traînée avec une approche champ lointain sur un profil RAE2822

3. La traînée parasite  $D_{sp}$  est générée par la technique utilisée pour la résolution des équations de transports du fluide sur un maillage discret, où des variations d'entropie ou d'enthalpie d'arrêt non-physique se produisent. Cela arrive essentiellement dans les endroits où le maillage n'est pas suffisamment raffiné pour capturer avec précision les importants gradients de vitesse, en particulier autour du bord d'attaque et dans la zone du tourbillon de bout d'aile. Thermodynamiquement, ces créations d'entropie génèrent de la traînée irréversible. L'origine n'est pas physique, mais numérique.
4. La traînée induite  $D_i$  se manifeste dans le cas d'une configuration portante tridimensionnelle, mais aussi en deux dimensions si les conditions aux limites de sortie ne sont pas assez éloignées du corps. Dans ce cas, la traînée induite peut être assimilée à de la traînée parasite.

Un exemple de production des différentes composantes de traînée champ lointain est donné sur la figure 2.2. L'analyse de la décomposition de la traînée champ lointain peut aider à la localisation d'une erreur et propose une estimation précise de la traînée numérique en éliminant la traînée parasite.

Dans la suite de la thèse, les coefficients de traînée seront utilisés ( $Cd_p$ ,  $Cd_f$ ,  $Cd_w$ ,  $Cd_{vp}$ ,  $Cd_{sp}$  et  $Cd_i$ ). Les efforts déterminés précédemment (equ. 2.35 et 2.36) sont adimensionnés par la quantité  $\frac{1}{2}\rho_\infty\|\vec{U}_\infty\|^2 S_{ref}$  (avec  $S_{ref}$  une surface de référence) pour obtenir les coefficients de traînée.

### 2.3.2 Détection des cellules pour le calcul de la traînée

Comme nous le voyons sur la figure 2.2, plusieurs zones de production de traînée existent dans le volume de calcul, certaines physiques et d'autres numériques. Les zones de traînée physique et parasite doivent être clairement identifiées. La traînée réelle doit être intégrée correctement, c'est à dire hors des zones de production de traînée d'origine purement numérique. Le choix des cellules du maillage retenues pour le calcul de la traînée champ lointain suit la procédure de l'outil de post-traitement traînée d'Airbus [5]. Le domaine de calcul  $V$  peut être partagé comme suit  $V = V_{vp} + V_w + V_{sp}$ . La traînée de pression visqueuse et la traînée de choc

sont calculées par intégration dans ces volumes de production ( $V_{vp}$  et  $V_w$ ) qui sont déterminés par des critères physiques. Un exemple de ces domaines d'intégration est donné sur la figure 2.3 pour l'aile ONERA M6. Les différents volumes d'intégration sont déterminés comme suit :

1. Pour la traînée de choc, le volume d'intégration est détecté par application de la relation :

$$\frac{\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p}{a \|\vec{\nabla} p\|} \geq \varepsilon_s \quad (2.40)$$

$\vec{\nabla} p$  est le gradient de pression,  $a$  la vitesse du son.

Pour chaque cellule du domaine, cette quantité est comparée à une valeur seuil  $\varepsilon_s$ . Si elle est plus grande, alors la cellule est considérée comme région de production pour la traînée de choc. A travers le choc, des oscillations d'origine numérique surévaluent le saut d'entropie (phénomène d'*overshoot*). On prend donc une marge de sécurité suivant toutes les directions principales dans le choix du volume d'intégration de la traînée (typiquement deux cellules en plus).

2. La traînée de pression visqueuse est intégrée dans la couche limite et le sillage visqueux. Pour commencer, la couche limite est marquée par un critère basé sur l'amplitude locale du tenseur des contraintes visqueuses. Pour chaque facette du profil, la norme maximale est détectée et la hauteur de la couche limite est atteinte lorsque le tenseur des contraintes visqueuses représente un certain pourcentage de la norme maximale. Ensuite, le sillage visqueux est localisé avec le champ de viscosité dynamique turbulente. Quand  $\mu_t/\mu$  dépasse une valeur seuil cette cellule est supposée être dans la couche visqueuse. Encore une fois, une marge de sécurité entoure les cellules déterminées précédemment.
3. La traînée induite est intégrée sur l'ensemble du domaine de calcul  $V$ . Cependant, une partie de la traînée induite est convertie en traînée visqueuse d'origine numérique par de la dissipation parasite dans le tourbillon de bout d'aile. En calculant cette production parasite à l'intérieur d'un cône de révolution dont le sommet est situé en bout d'aile, on peut corriger d'une manière satisfaisante l'intégration de la traînée induite.

Tous ces volumes d'intégration changent selon la précision de la solution numérique et donc selon le raffinement de maillage.

## 2.4 Correction adjointe appliquée à la traînée champ lointain

Le vecteur adjoint est déterminé par un processus d'optimisation. En résolvant l'équation 2.26, le membre de droite nécessite la dérivation des coefficients aérodynamiques intégraux par rapport aux grandeurs conservatives. On dérive alors directement les termes à l'intérieur des intégrales. En effet, pour le champ proche, les surfaces d'intégration ne dépendent pas du raffinement du maillage (s'il est suffisamment raffiné). Pour le champ lointain, on a supposé que le volume d'intégration varie très peu entre deux itérations du processus d'optimisation. Dans cette optique nous devons donc calculer et considérer les volumes d'intégrations des différentes composantes de la traînée sur le maillage fin.

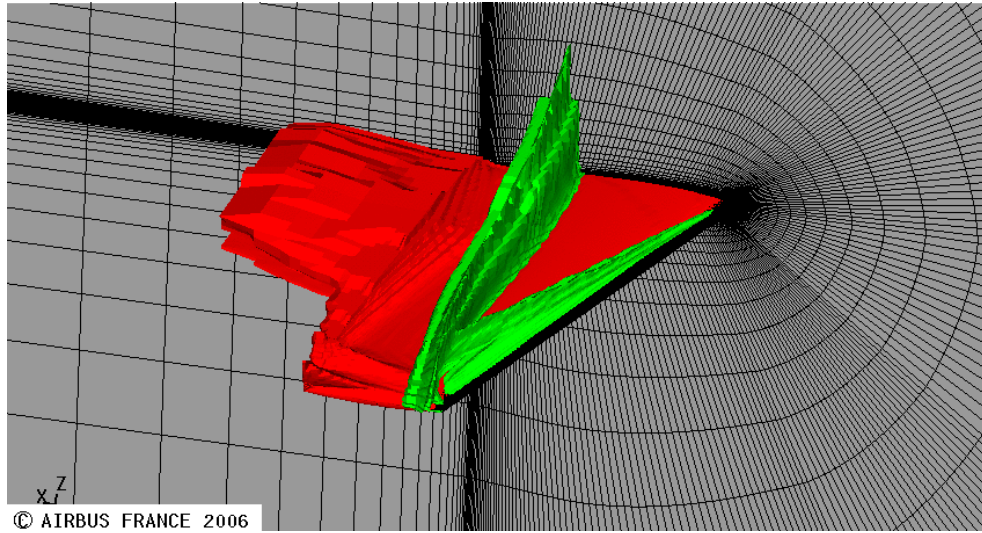
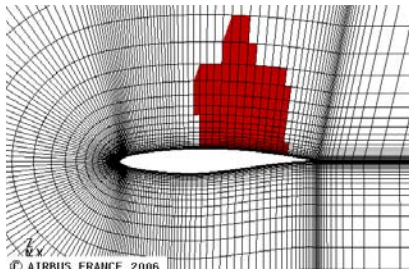
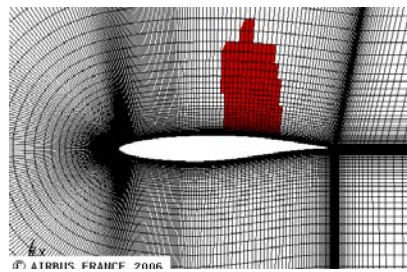


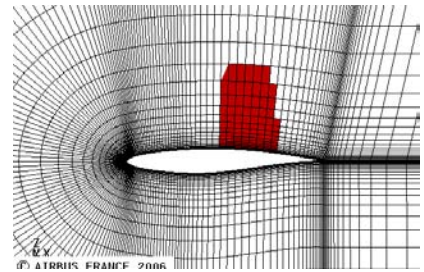
FIG. 2.3 – Domaine d'intégration pour la traînée de pression visqueuse (en rouge) et la traînée de choc (en vert) pour l'aile ONERA M6



(a) Volume d'intégration de la traînée de choc associé au maillage grossier ( $vol_H$ )



(b) Volume d'intégration de la traînée de choc associé au maillage fin et ( $vol_h$ )



(c) Volume d'intégration de la traînée de choc associé au maillage fin et restreinte au maillage grossier ( $vol_h^H$ )

FIG. 2.4 – Différence entre les volumes d'intégration de la traînée de choc cas RAE2822 (section 3.1.2)

En considérant le volume d'intégration  $vol$  pour les composantes de traînée issues d'une approche champ lointain, l'équation 2.28 devient :

$$\begin{aligned} f_{h,vol_h}(W_h) - f_{h,vol_h}(\mathbf{L}_h^H W_H) &= \left[ \mathbf{L}_h^H \lambda_{H,vol_h^H} \right]^T R_h(\mathbf{L}_h^H W_H) \\ &+ \left[ \mathbf{Q}_h^H \lambda_{H,vol_h^H} - \mathbf{L}_h^H \lambda_{H,vol_h^H} \right]^T R_h(\mathbf{L}_h^H W_H) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$vol_h$  est le volume d'intégration du maillage fin avec la solution perturbée. Pour prendre en compte  $vol_h$  dans le calcul du vecteur adjoint, on restreint ce volume au maillage grossier et on obtient le volume  $vol_h^H$ . Un critère de sélection est appliqué pour connaître quelles cellules grossières sont éligibles pour être marquées. Par exemple pour un cas 2D, quatre cellules fines correspondent à une cellule grossière, le critère de sélection sert à savoir combien de cellules marquées du maillage fin sont nécessaires pour marquer la cellule du maillage grossier. Nous avons choisi le critère qui donne la traînée sur le maillage grossier la plus proche de celle sur le maillage fin ( $f_{h,vol_h}(\mathbf{L}_h^H W_H) \approx f_{H,vol_h^H}(W_H)$ ).

Illustrons ce processus à l'aide de la figure 2.4. La figure 2.4(a) montre le volume d'intégration déterminé sur le maillage grossier. Lorsque nous injectons la solution du maillage grossier au maillage fin et que le volume d'intégration est calculé, nous obtenons le volume illustré par la figure 2.4(b). Ces deux volumes d'intégration sont assez différents. C'est pour cela que l'on opère une restriction du maillage fin au maillage grossier et que l'on obtient le volume d'intégration  $vol_h^H$  qui est sur la figure 2.4(c).

## 2.5 Raffinement et adaptation de maillage

### 2.5.1 Introduction à l'adaptation de maillage

Pour augmenter la précision d'un calcul numérique et ainsi diminuer l'erreur numérique, nous disposons de trois méthodes différentes :

- Le **h-refinement** : des points sont ajoutés localement dans le maillage. Il est aussi possible d'enlever des points autre part dans le maillage. La méthode convient très bien aux écoulements présentant des discontinuités tel un choc.
- Le **r-refinement** : on garde le même nombre de points dans le maillage mais ils sont redistribués selon la répartition de l'erreur. La structure du maillage est conservée ce qui est intéressant pour les maillages structurés. Le seul problème est de pouvoir bien contrôler les déformations du maillage qui peuvent rendre des mailles très cisailées ou les déverser.
- Le **p-refinement** : il est particulièrement adapté aux calculs effectués par la méthode des éléments finis. Cette méthode a pour but d'utiliser des fonctions de résolution d'équation d'ordre élevé là où l'erreur numérique est grande.

Dans notre cas étant donné que nous sommes en volume fini, le **p-refinement** n'est pas envisageable. La méthode de **h-refinement** sera traitée dans la section 2.5.2. La méthode de **r-refinement** sera traitée dans la section 2.5.3.

### 2.5.2 Raffinement de maillage adaptatif

Cette méthode fut développée dans les années 1980 par Berger et Collela [12,13].



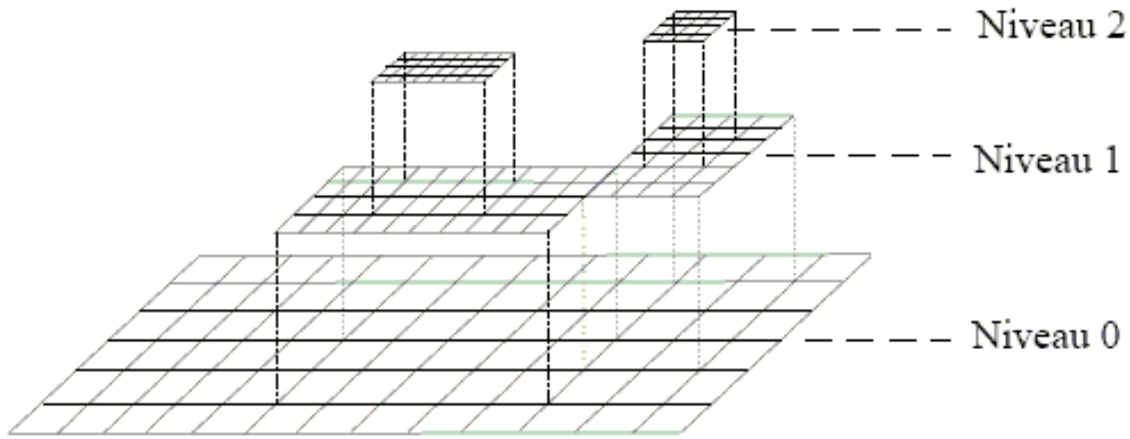


FIG. 2.5 – Raffinement hiérarchisé avec maillages alignés

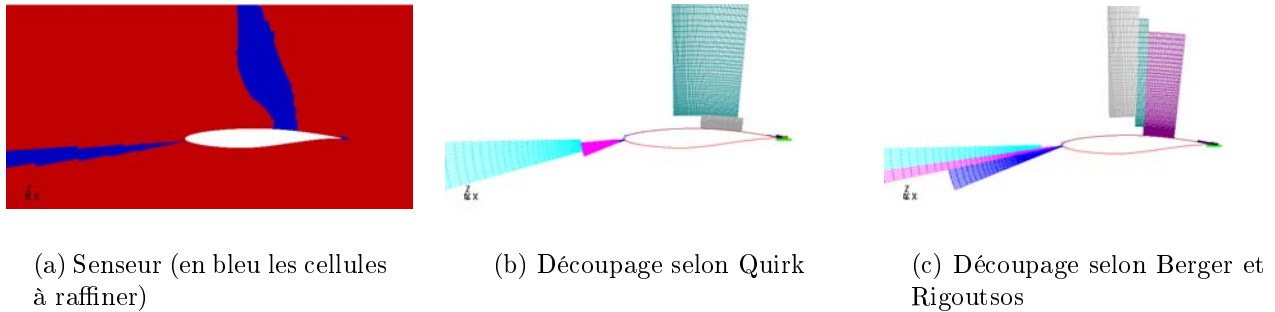


FIG. 2.6 – Comparaison des algorithmes de création de sous-blocs

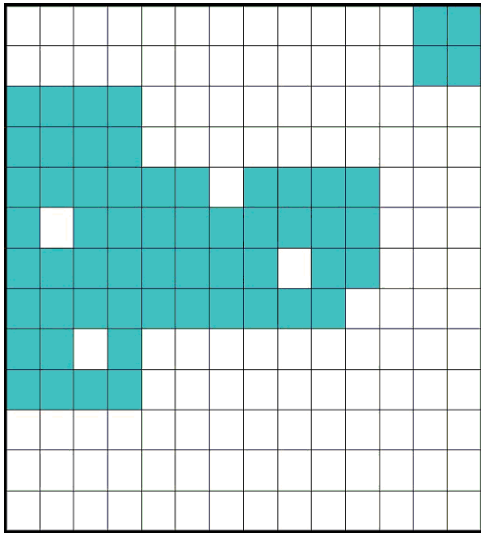
La méthode hiérarchisée de raffinement de maillage appelé AMR a pour but d'enrichir localement un maillage de fond afin de capturer des phénomènes ayant des échelles différentes dans l'écoulement (fig. 2.5). Le calcul sur ces différents niveaux hiérarchiques s'effectuera de manière analogue au multigrille globale.

Avant d'effectuer le calcul sur notre maillage hiérarchisé, nous devons effectuer deux opérations importantes pour la détermination des sous-blocs. Tout d'abord il faut déterminer un senseur pour connaître les cellules éligibles pour le raffinement (fig. 2.6(a)). Dans notre cas nous utiliserons le senseur fourni par l'erreur adjointe. Lorsque ce senseur est fixé, la deuxième étape sert à construire les différents sous-blocs. Il faut utiliser un algorithme pour déterminer de façon optimale le nombre et l'emplacement des sous-blocs. Deux exemples d'algorithme seront présentés dans la suite : l'algorithme de Quirk (fig. 2.6(b)) qui était utilisé chez Airbus et l'algorithme de Berger et Rigoutsos (fig. 2.6(c)) qui a été implémenté lors de cette thèse.

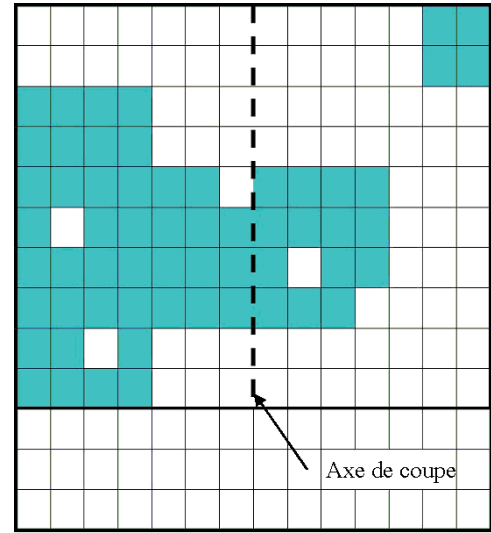
### 2.5.2.1 Algorithme de Quirk

Cet algorithme de détermination de sous-blocs peut se trouver dans la thèse J. J. Quirk [54]. Pour plus de facilité, nous allons expliquer le principe en deux dimensions.

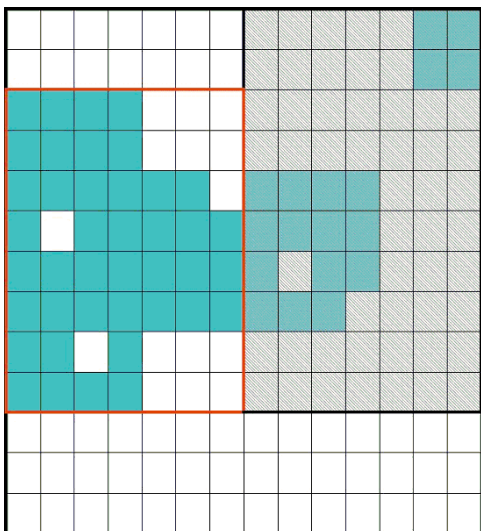
Tout d'abord on détermine le plus petit rectangle entourant toutes les cellules marquées pour être raffinées (figure 2.7(b)). Ensuite on regarde si le critère du nombre de cellules marquées divisé par le nombre de cellules dans le rectangle est supérieur ou inférieur au seuil fixé



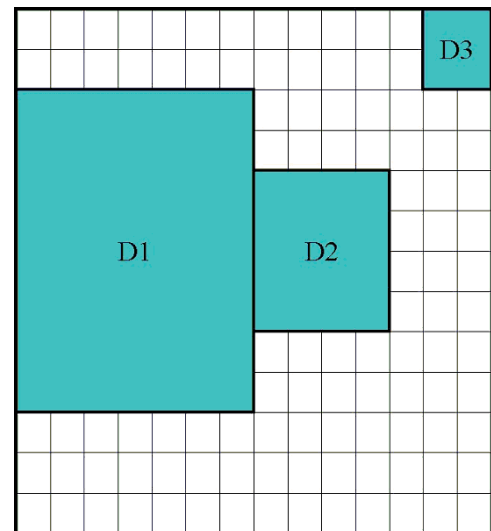
(a) Maillage initial



(b) Création du rectangle minimal autour des cellules marquées et premier axe de coupe selon la demi longueur



(c) Convergence du processus pour la partie gauche pour un seuil de 70% de cellules marquées



(d) Découpage final

FIG. 2.7 – Exemple d'application de l'algorithme de Quirk [54]

par l'opérateur. Si cette valeur est inférieure à ce seuil alors le rectangle est éligible pour le raffinement et le processus s'arrête là, sinon le rectangle est coupé en deux selon la longueur. On traite d'abord un des deux domaines déterminés en recommençant le même processus de détermination du plus petit rectangle puis on effectue le test sur le critère d'arrêt et si celui-ci n'est pas rempli, on itère jusqu'à convergence. On fera de même pour l'autre partie du domaine.

Dans notre cas, sur la figure 2.7(c), nous avons commencé par la partie gauche du domaine. Ensuite, nous avons déterminé le rectangle minimal entourant les cellules marquées (rectangle rouge). Pour ce cas là, le critère d'arrêt a été choisi à 70% de cellules marquées dans le rectangle. Il y a 41 cellules marquées pour un total de 56 cellules. Cela nous fait 73% de cellules marquées donc le processus peut s'arrêter sur ce rectangle. Le domaine D1 est créé. Nous traitons ensuite la partie droite du domaine. On obtient à la fin du traitement le découpage que l'on peut voir sur la figure 2.7(d).

L'avantage de cet algorithme est sa simplicité de mise en oeuvre. Le désavantage est que cela ne va pas forcément déterminer les domaines les plus optimaux pour la création de sous-blocs. De plus cela peut entraîner des découpages pouvant aboutir à des sous-blocs de très petites tailles si le critère d'arrêt est élevé ou si le découpage passe vraiment à de mauvais endroits.

### 2.5.2.2 Algorithme de Berger et Rigoutsos

Cet algorithme de détermination de sous-blocs a été proposé dans [14]. Pour plus de facilité, nous allons expliquer le principe en deux dimensions.

Tout d'abord on détermine le plus petit rectangle entourant toutes les cellules marquées pour être raffinées. Les cellules marquées sont définies avec l'attribut  $A(i, j) = 1$  et les autres cellules sont définies avec l'attribut  $A(i, j) = 0$  (fig. 2.8(a)). Définissons les signatures  $S_I$  et  $S_J$  qui sont le nombre de cellules marquées le long de chaque axe topologique (fig. 2.8(b)) :

$$S_I(i) = \sum_j A(i, j) \quad S_J(j) = \sum_i A(i, j) \quad (2.42)$$

Si la signature est égale à zéro, cet axe ne contient pas de cellules marquées et est donc potentiellement un axe de coupure. S'il existe plusieurs axes égaux à zéro, le meilleur sera celui qui sera le plus central selon son propre axe et il sera utilisé pour partager le domaine (fig. 2.8(b)).

Cependant, dans plusieurs cas, les signatures sont toutes différentes de zéro. Dans ces cas là, le Laplacien des signatures est utilisé :

$$L_I(i) = S_I(i+1) - 2S_I(i) + S_I(i-1) \quad (2.43)$$

$$L_J(j) = S_J(j+1) - 2S_J(j) + S_J(j-1) \quad (2.44)$$

Le passage par zéro est indiqué par le changement de signe de  $L$ , et tout passage par zéro peut être un axe de coupure car il détermine un point d'inflexion dans le domaine de calcul. Le meilleur axe sera celui qui aura l'amplitude  $\Delta_I(i + \frac{1}{2}) = |L_I(i+1) - L_I(i)|$  la plus grande (fig. 2.8(c)) car c'est là où le changement de topologie sera le plus grand.

L'algorithme de découpage en sous-blocs recommence alors sur chacun des sous-ensembles. Le dispositif récursif s'arrête lorsque l'on atteint le critère d'arrêt qui est défini par le rapport entre le nombre de cellules marquées sur le nombre de cellules appartenant à la région, est supérieur à un seuil choisi par l'utilisateur (fig. 2.8(d)).

L'avantage de cet algorithme est de pouvoir déterminer des zones d'implantation de sous-blocs contenant un nombre optimisé et donc important de cellules marquées. Le désavantage est qu'il peut prendre plus de temps que l'algorithme de Quirk.

### 2.5.3 Adaptation du maillage par déplacement des noeuds

La méthode est assez facile à expliquer en une seule dimension et sera ensuite généralisée en trois dimensions. L'adaptation par redistribution des points de maillage est basée sur le principe d'équidistribution de l'erreur. Ce principe va dans le sens de rendre constant le produit de l'espacement (taille d'une arête de maillage) et de la fonction poids  $B(x)$  (l'erreur) pour tous les points du maillage. La distribution de point du maillage  $x(\xi)$  dépend de  $\xi$ , une coordonnée topologique variant d'un incrément unitaire entre deux points  $\Delta\xi = 1$ . En utilisant le changement de coordonnées  $x_\xi = \frac{dx}{d\xi}$ , on obtient la taille d'une arête du maillage. Avec ces notations, le principe d'équidistribution est exprimé comme suit :

$$B(x)x_\xi = \text{constant} \quad (2.45)$$

Nous pouvons voir que le gradient du maillage va être grand (petite taille de cellule) là où la fonction poids est petite et *vice versa*. L'équation précédente peut être généralisée en trois dimensions [63]. L'équation 2.45 est appelée équation directe car  $x$  est la variable principale. La formulation inverse est plus utile pour construire les équations. Dans ce cas,  $\xi(x)$  est la variable principale et  $\xi_x$  représente le nombre de points de maillage par unité de longueur (densité de point).

La formulation inverse en trois dimensions sans les fonctions poids se ramène à résoudre une équation de Poisson :

$$\nabla^2 \xi^k = P_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.46)$$

avec  $\xi^k$  les trois coordonnées topologique et  $P_k$  est un terme source souvent utilisé pour garder l'orthogonalité ou préserver une couche limite dans un maillage dit Navier-Stokes. L'équation 2.46 peut être transformée en formulation directe (notation d'Einstein) :

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + P_m \frac{\partial x^k}{\partial \xi^m} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.47)$$

avec  $x^k = (x, y, z)$  et où  $g^{ij}$  est :

$$g^{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \quad (2.48)$$

Pour faire de l'équidistribution de l'erreur on introduit une matrice poids  $B$  [30], la formulation inverse devient alors :

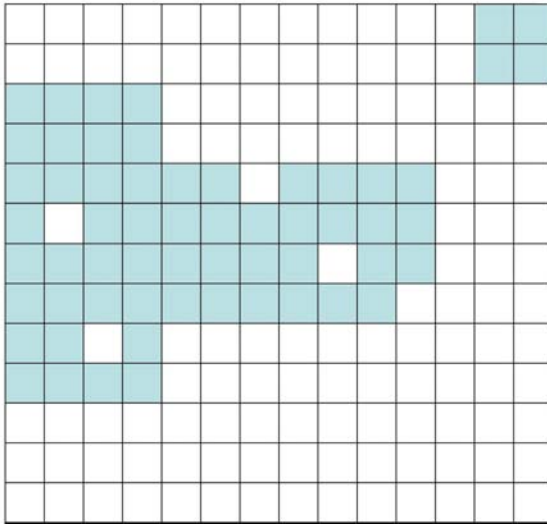
$$\nabla \cdot (B \nabla \xi^k) = P_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

qui peut être transformée en formulation directe :

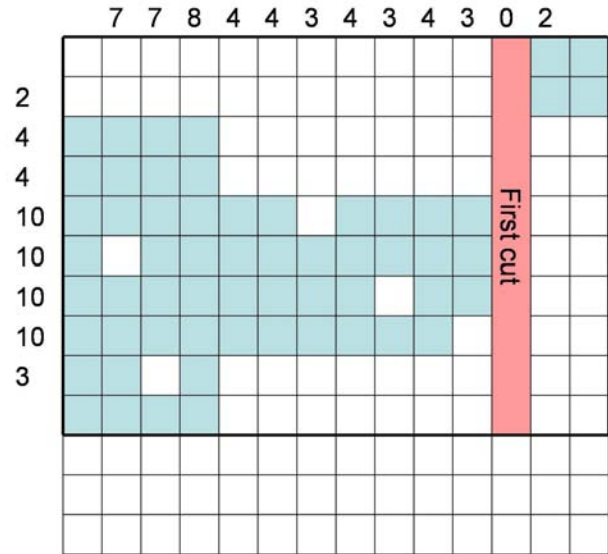
$$g^{ij} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + P_m \frac{\partial x^k}{\partial \xi^m} = \frac{\partial b^{nk}}{\partial x^n}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

où

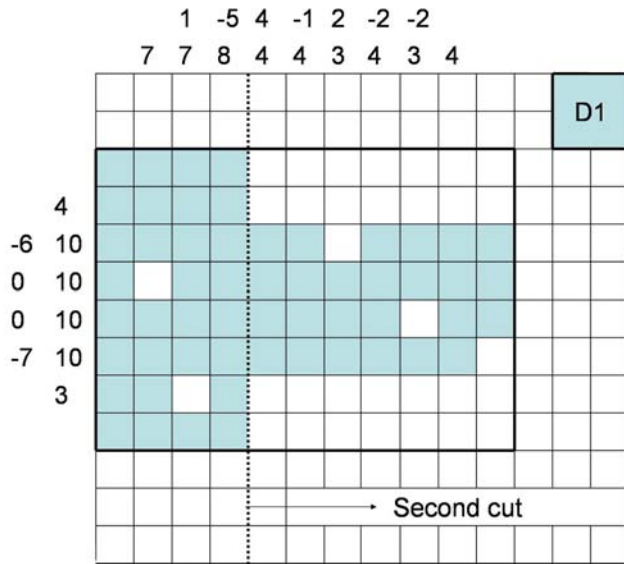
$$g^{ij} = b^{mn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^n} \quad (2.51)$$



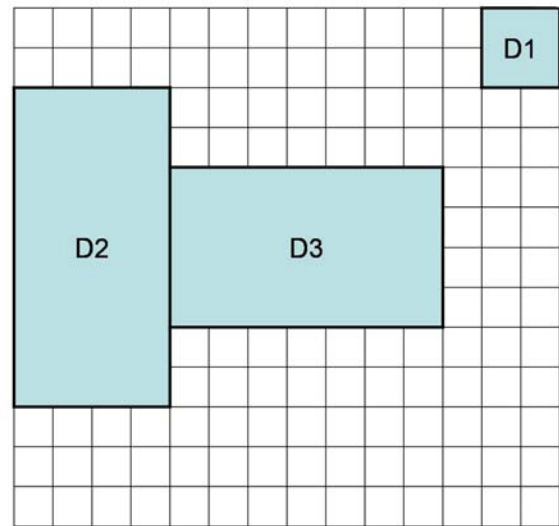
(a) Maillage initial



(b) Création du rectangle minimal autour des cellules marquées et premier axe de coupe par détection d'un zéro



(c) Second axe de coupe avec la méthode des laplaciens



(d) Découpage final

FIG. 2.8 – Exemple d'application de l'algorithme de Berger et Rigoutsos [14]

Les  $b^{mn}$  sont les différents termes de la matrice de la fonction poids.

Dans notre cas les termes sources sont égaux à zéro et la matrice  $B$  sera une matrice diagonale remplie par les termes d'erreur adjointe.

#### 2.5.4 Bilan sur les techniques d'adaptation de maillage

Dans le cadre de cette thèse, les calculs seront faits avec des maillages structurés. Dans ce contexte, les techniques d'adaptation de maillage sont moins nombreuses que pour des maillages non-structurés. Deux approches ont été sélectionnées : une technique d'enrichissement de maillage et une technique de déplacement des noeuds du maillage. Ces deux méthodes agissent différemment sur l'écoulement. D'un côté avec l'enrichissement de maillage, on va définir plus finement certains phénomènes physiques et de l'autre côté avec le déplacement des noeuds du maillage, on va mieux répartir l'erreur dans le domaine de calcul. Par cette action différente sur le maillage, ces méthodes sont complémentaires.

## 2.6 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons exposé les différentes méthodes utilisées par la suite. Tout d'abord, nous avons développé un outil de post-traitement pour calculer la correction adjointe ainsi que l'erreur adjointe. Dans cet outil nous avons inclut les interpolations décrites précédemment (linéaire et cubique). Ensuite, pour l'enrichissement de maillage, nous avons implémenté la détermination des sous-blocs par la méthode de Berger et Rigoutsos et nous avons amélioré l'outil déjà existant au sein d'Airbus. Pour terminer, nous avons adapté l'outil de lissage d'Airbus pour pouvoir faire de l'adaptation de maillage par déplacement des noeuds. Ces développements informatiques ont pris une part importante au cours de la thèse.

# Chapitre 3

## Application de la correction basée sur l'opérateur adjoint

La correction adjointe va être utilisée pour des fluides parfaits et visqueux. Le fait d'étudier les écoulements non-visqueux va nous permettre d'apprécier la correction adjointe sur des cas ne comportant pas de phénomènes liés à la viscosité telle la couche limite, la génération de traînée de frottement ou de pression visqueuse. De plus, les maillages demandent moins de points comparativement à ceux pour les fluides visqueux, cela donnera des temps de calcul plus court et une manipulation plus simple des maillages pour le développement de l'outil de calcul de la correction adjointe.

Ensuite, les fluides visqueux vont être considérés. De nos jours toutes les conceptions de formes aérodynamiques se font avec des calculs en fluide visqueux. L'outil de calcul de la correction doit pouvoir être capable de traiter ces cas pour être applicable dans un contexte industriel. De plus, les contraintes sur les maillages sont différentes de celles pour des calculs en fluide non-visqueux à cause de la présence de la couche limite qu'il faut bien définir ainsi que du sillage. Il va être intéressant de voir le comportement de la correction adjointe sur ce nouveau genre de maillage.

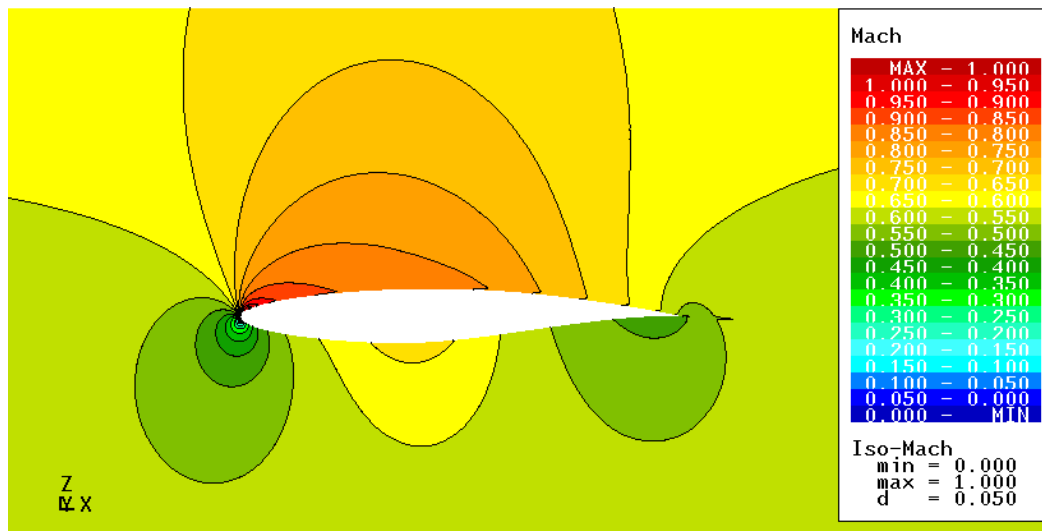
Les coefficients de traînée seront donnés en point de traînée. Un point de traînée correspond à  $10^4$  du coefficient de traînée.

### 3.1 Ecoulements non-visqueux - approche EULER

En absence de viscosité, les composantes de la traînée se réduisent à la traînée de choc et induite pour une approche champ lointain et à la traînée de pression pour une approche champ proche. De plus, si l'on considère un profil d'aile bidimensionnelle dans un écoulement subsonique, la composante de traînée est nulle. Ce cas va introduire le calcul de la correction adjointe sur un nombre réduit de coefficients aérodynamiques et un écoulement assez simple. Ce premier cas sera le profil RAE2822 à un nombre de Mach de 0.6 et une incidence de  $2.5^\circ$ .

Notre deuxième exemple sera le profil RAE2822 à un nombre Mach de 0.73, transsonique, et une incidence de  $2.5^\circ$ . On rajoute alors un seul coefficient aérodynamique la traînée de choc. Le comportement de la correction adjointe par rapport à ce nouveau coefficient sera éprouvé.

Le coefficient de traînée induite peut être introduit en passant à une aile tridimensionnelle dans un écoulement transsonique (aile ONERA M6 à un nombre de Mach de 0.84 et une incidence de  $3.0^\circ$ ). Pour finir notre étude sur les fluides non-visqueux une configuration plus

FIG. 3.1 – Iso-mach RAE2822,  $M=0.6$ ,  $\alpha=2.5^\circ$ 

complexe doit être traitée. L'AS28G est très proche d'une forme industrielle avec un fuselage, une aile, un mât moteur et une nacelle perméable. Les conditions de vol seront un nombre de Mach de 0.80 et une incidence de  $2.2^\circ$ .

Pour le calcul de la correction adjointe, le maillage isotropiquement raffiné fera office de maillage fin ainsi que de maillage de calcul pour la convergence en maillage.

### 3.1.1 Écoulement subsonique autour d'un profil d'aile

#### 3.1.1.1 L'écoulement

Le profil RAE2822 est dans un écoulement à un nombre de Mach de 0.6 et une incidence de  $2.5^\circ$ . L'écoulement autour du profil RAE2822 (fig. 3.1) est assez simple. Nous sommes en présence d'un cas 2D subsonique sans choc, ni traînée induite et donc avec une traînée théoriquement nulle. Cette partie se sépare en deux sous-parties. La première va traiter d'une approche inédite qui va tester la correction adjointe sur un calcul non-convergé. La seconde appliquera la correction adjointe d'une façon plus classique sur des coefficients aérodynamiques champ proche.

#### 3.1.1.2 Correction adjointe des états successifs de convergence

On observe ce que peut donner une correction adjointe avec un vecteur d'état perturbé connu après convergence d'un calcul direct stationnaire. En effet, lors de la convergence d'un calcul, les variables conservatives convergent petit à petit vers un état stable. Cependant avant cet état, nous avons des états perturbés. De ce fait les composantes de traînée ou de portance n'ont pas encore la valeur du calcul convergé. Nous pouvons alors en considérant une solution non convergée appliquer la correction adjointe en calculant sur le maillage donné le vecteur adjoint et en extrayant le résidu de convergence (eq. 2.27).

L'approche numérique a été choisie pour que la convergence soit moins rapide que d'habitude : pas d'utilisation du multigrille, CFL faible,...



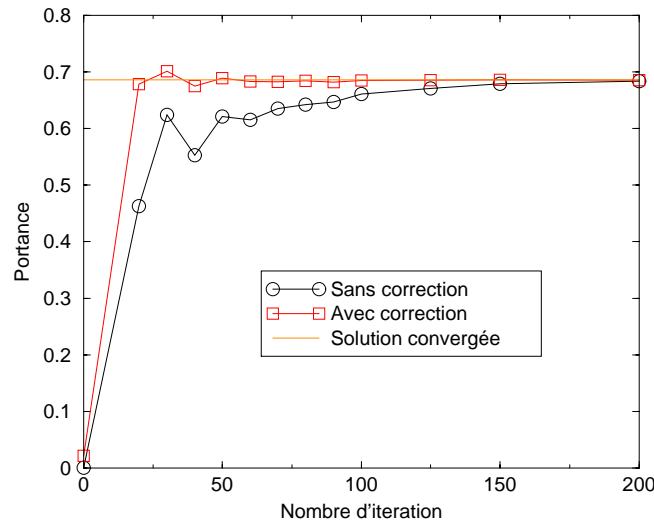


FIG. 3.2 – Correction de la courbe de convergence de la portance (RAE2822 Euler M=0.6)

Sur la figure 3.2, la convergence de la portance en fonction du nombre d'itérations a été tracée ainsi que sa valeur avec la correction adjointe. Nous pouvons remarquer qu'à partir de 50 itérations la correction adjointe donne quasiment la même valeur que la solution convergée. Cet exemple montre bien que la théorie de la correction adjointe sans approximation au niveau du vecteur adjoint marche bien. De plus, cet exemple illustre une façon originale de générer un vecteur d'état perturbé différente d'une interpolation d'un maillage fin sur un maillage grossier. L'intérêt de cette manipulation est dans un contexte industriel totalement inadapté car même si l'on ne fait que 50 itérations sur notre maillage et qu'après on calcule la correction adjointe, le vecteur adjoint doit quand même être calculé ce qui correspond, en temps de calcul, à effectuer un calcul direct convergé.

Cela montre quand même une autre utilisation de la correction adjointe. On pourrait aussi imaginer utiliser la correction adjointe pour se rendre compte de la convergence d'un calcul direct sur un paramètre étudié comme l'intégration sur un plan donné par l'utilisateur de la pression.

### 3.1.1.3 Correction adjointe

Nous passons maintenant à une utilisation classique de la correction adjointe. Quatre raffinements de maillage sont considérés.

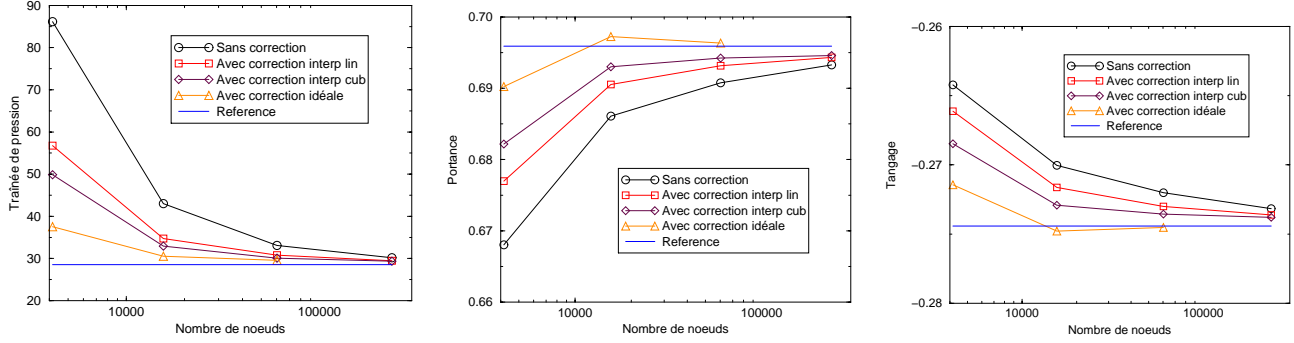
La convergence en maillage des coefficients aérodynamiques est montrée sur la courbe sans correction de la figure 3.3. Au niveau de la correction adjointe, nous avons considéré trois corrections différentes :

- La correction adjointe idéale (équation 2.27)
- La correction adjointe avec l'interpolation linéaire (équation 2.28)
- La correction adjointe avec l'interpolation cubique (équation 2.28)

La même interpolation a été appliquée aussi bien au vecteur adjoint qu'au vecteur des variables conservatives. La correction adjointe idéale est très proche de la solution sur le maillage suivant. Cette correction donne un meilleur résultat que les deux autres. Pour les corrections incluant des interpolations, la correction utilisant l'interpolation cubique fournit logiquement

Interpolation	linéaire du résidu	cubique du résidu
linéaire de l'adjoint	0.00894	0.01415
cubique de l'adjoint	0.00874	0.01390

TAB. 3.1 – Etude des différentes interpolations sur la correction adjointe (portance pour RAE2822 Euler M=0.6)



(a) Trainée (en point)

(b) Portance

(c) Tangage

FIG. 3.3 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 4 maillages différents (RAE2822 Euler M=0.6)

un résultat meilleur que celle utilisant l'interpolation linéaire.

Néanmoins après ces premiers résultats une question subsiste : quel est le facteur déterminant pour avoir une correction satisfaisante ? Est-ce l'interpolation sur le vecteur d'état ou sur le vecteur adjoint ? Sur le tableau 3.1, nous pouvons constater que l'élément déterminant entre les différentes interpolations est l'interpolation du résidu qui donne des écarts conséquents. Il sera donc recommandé d'utiliser l'interpolation de plus grand ordre pour obtenir un bon résidu.

Pour la trainée, nous observons ici une trainée champ proche différente de zéro. Ceci est dû à la trainée parasite et à la trainée induite<sup>1</sup> car les conditions aux limites extérieures ne sont qu'à 10 cordes du profil ce qui n'est pas suffisant pour dissiper cette trainée induite parasite. Une approche avec l'outil d'analyse champ lointain nous donne bien la trainée égale à zéro.

Pour terminer, nous avons calculé l'ordre du schéma de discrétisation  $p$  avec l'équation 2.8 donnée par la correction de Richardson généralisée. Etant donné que nous avons besoin de 3 maillages consécutifs, le maillage le plus grossier a été numéroté 1 et le maillage le plus fin 5. Dans le tableau 3.2, la première colonne (Maillages) correspond aux maillages utilisés. La seconde ( $p_{normal}$ ) correspond à l'ordre de discrétisation calculé avec les valeurs de trainée fournies par le calcul CFD. La troisième colonne ( $p_{adj}$ ) correspond à l'ordre de discrétisation calculé avec les valeurs de trainée corrigées par la correction adjointe (interpolation cubique). La quatrième colonne ( $C_d$ ) collecte les coefficients de trainée des maillages les plus fins considérés sur la même ligne. Dans la cinquième colonne ( $C_{d_{rich}}$ ), le coefficient trainée  $C_d$  est corrigé par

<sup>1</sup>Cette trainée induite est considérée dans ce cas là comme une trainée parasite. Mais elle garde le nom de trainée induite car elle possède les mêmes caractéristiques comme par exemple son évolution en fonction du carré de la portance.

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	2.126	2.571	33.1	30.2	30.1	29.5
2-3-4	1.745	1.980	30.2	28.9	29.4	29.1
3-4-5	2.142	/	29.5	29.3	/	/

TAB. 3.2 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour la RAE2822 Euler M=0.6 (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 5 : maillage le plus fin)

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_l$	$C_{l_{rich}}$	$C_{l_{adj}}$	$C_{l_{adj+rich}}$
1-2-3	1.948	3.148	0.6907	0.6923	0.6942	0.6944
2-3-4	0.890	1.748	0.6932	0.6962	0.6945	0.6947
3-4-5	1.663	/	0.6940	0.6944	/	/

TAB. 3.3 – Ordre de discrétisation par rapport à la portance pour la RAE2822 Euler M=0.6 (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 5 : maillage le plus fin)

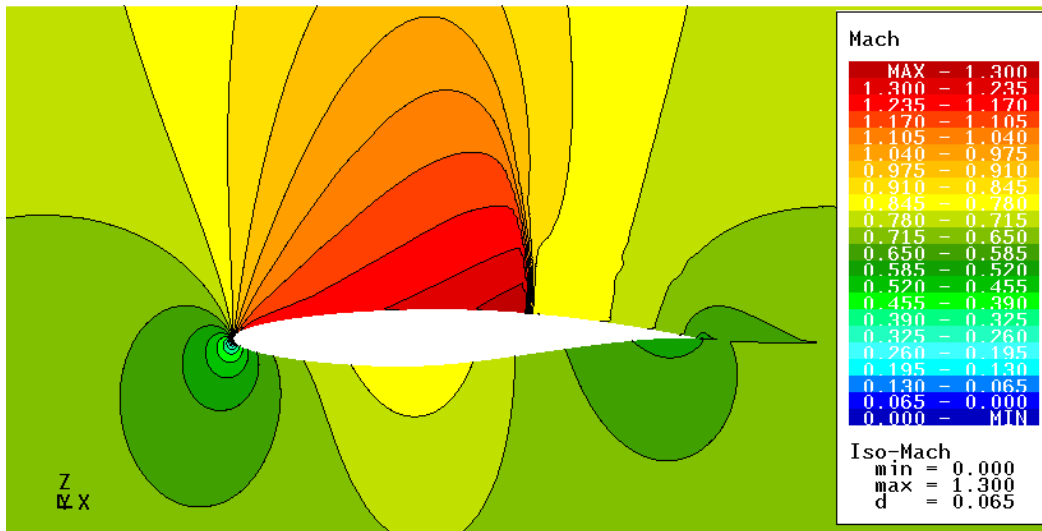
la formule de Richardson à l'aide de  $p_{normal}$ . La sixième colonne ( $C_{d_{adj}}$ ) collecte les coefficients de traînée avec correction adjointe des maillages les plus fins considérés sur la même ligne. Dans la septième colonne ( $C_{d_{adj+rich}}$ ), le coefficient de traînée  $C_{d_{adj}}$  est corrigé par la formule de Richardson à l'aide de  $p_{adj}$ .

Normalement l'ordre du schéma est de 2. Nous pouvons voir que les valeurs de  $p_{normal}$  fluctuent entre les différents maillages considérés. Cependant la théorie du calcul de l'ordre de discrétisation par Richardson n'est valable que pour des maillages proche de la convergence en maillage. De ce fait les valeurs d'ordre de schéma de discrétisation à considérer sont celles des maillages les plus raffinés, les autres valeurs peuvent servir à faire des comparaisons avec  $p_{adj}$ . Nous pouvons remarquer que l'ordre augmente lorsque l'on utilise les coefficients corrigés avec la correction adjointe. Pour la traînée, la correction adjointe donne de meilleurs résultats que l'extrapolation de Richardson en particulier sur le deuxième cas où la traînée est sous-estimée par l'extrapolation de Richardson alors qu'elle est bien estimée par la correction adjointe.

Les tableaux 3.3 et 3.4 donnent les résultats pour respectivement la portance et le moment de tangage. Nous pouvons remarquer que les ordres de discrétisation calculés sans correction ( $p_{normal}$ ) sont inférieurs à ceux calculés pour la traînée. Cependant comme pour la traînée, ils augmentent quand on utilise les valeurs issues de la correction adjointe. Encore une fois la correction adjointe donne des résultats très satisfaisants par rapport à l'extrapolation de Richardson.

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_{my}$	$C_{my_{rich}}$	$C_{my_{adj}}$	$C_{my_{adj+rich}}$
1-2-3	1.556	2.791	-0.2720	-0.2730	-0.2735	-0.2737
2-3-4	0.780	1.470	-0.2731	-0.2747	-0.2738	-0.2739
3-4-5	1.448	/	-0.2736	-0.2738	/	/

TAB. 3.4 – Ordre de discrétisation par rapport au tangage pour la RAE2822 Euler M=0.6 (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 5 : maillage le plus fin)

FIG. 3.4 – Iso-mach RAE2822,  $M=0.73$ ,  $\alpha=2.5^\circ$ 

### 3.1.2 Écoulement transsonique autour d'un profil d'aile

#### 3.1.2.1 L'écoulement

Le profil RAE2822 se trouve avec un nombre de Mach de 0.73 et une incidence de  $2.5^\circ$ . Le profil RAE2822 est dans un écoulement transsonique (fig. 3.4), de ce fait un choc se développe à 63% de la corde sur l'extrados du profil. Dans ces conditions la seule production de traînée se fait par le choc. La correction adjointe va alors pouvoir être appliquée sur notre première composante de traînée issue de l'approche champ lointain, la traînée de choc.

#### 3.1.2.2 Correction adjointe

Sur la figure 3.5(a), nous avons encore une fois le même comportement (cf. cas subsonique) sur un coefficient champ proche (traînée de pression) pour les différentes corrections adjointes. Au niveau de la traînée de choc (fig. 3.5(b)), deux corrections différentes sont étudiées :

- la correction adjointe basée sur le volume d'intégration de la traînée de choc du maillage de départ
- la correction adjointe basée sur le volume d'intégration de la traînée de choc du maillage suivant avec la solution perturbée, ramené au maillage courant (eq. 2.41)

Nous voyons bien que la correction avec le volume d'intégration du maillage fin est meilleure que l'autre. Pour les maillages les plus fins, la différence est très faible car le volume d'intégration ne change plus trop d'un maillage à l'autre.

Pour les maillages les plus fins, nous devrions avoir une égalité parfaite entre la traînée champ proche et la traînée champ lointain. Malheureusement, comme dans le cas précédent les limites du domaine se trouvent trop proche du profil d'où une production non physique de traînée induite que l'on considère comme une partie de la traînée parasite. Sur la figure 3.6(a), la traînée induite diminue fortement avec l'éloignement des limites du domaine de calcul, alors que la traînée parasite qui est intrinsèque au maillage ne bouge presque pas vu que la taille des mailles ne change pas. De même sur la figure 3.6(b), nous pouvons voir la convergence des

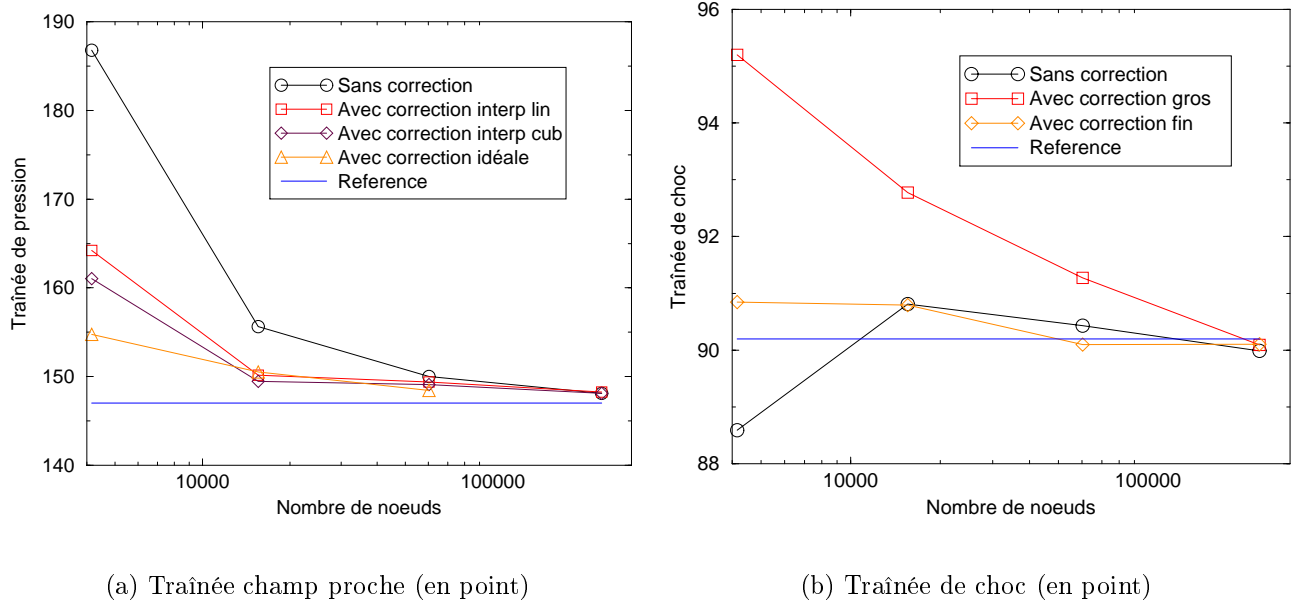


FIG. 3.5 – Correction des composantes champ proche et champ lointain avec 4 maillages différents (RAE2822 Euler M=0.73)

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	2.463	3.449	150.0	148.8	148.0	147.9
2-3-4	1.539	1.948	148.1	147.1	147.8	147.7
3-4-5	1.822	/	147.5	147.3	/	/

TAB. 3.5 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour la RAE2822 Euler M=0.73 (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 5 : maillage le plus fin)

traînée champ proche et lointain. La seule composante à diminuer est la traînée induite. Il est bien sûr inconcevable de faire des maillages industriels d'une telle taille pour éliminer les traînée parasites. C'est pour cela que l'outil d'analyse de traînée FFD41 a été fait et nous pouvons voir que la traînée champ lointain ne varie pas lorsque l'on éloigne les limites du domaine de calcul.

Le tableau 3.5 présente, comme dans le cas précédent, l'ordre de discrétisation du schéma évalué par rapport à la traînée de pression champ proche. Cette étude n'a pas pu être faite avec la portance et le tangage car les courbes de convergence ne sont pas monotones. Nous pouvons une fois de plus remarquer que l'ordre du schéma augmente quand la correction adjointe est appliquée. De plus, la correction adjointe fournit des résultats meilleurs par rapport à celle de Richardson qui peut donner des surestimations de la correction sur un calcul assez éloigné de l'état convergé.

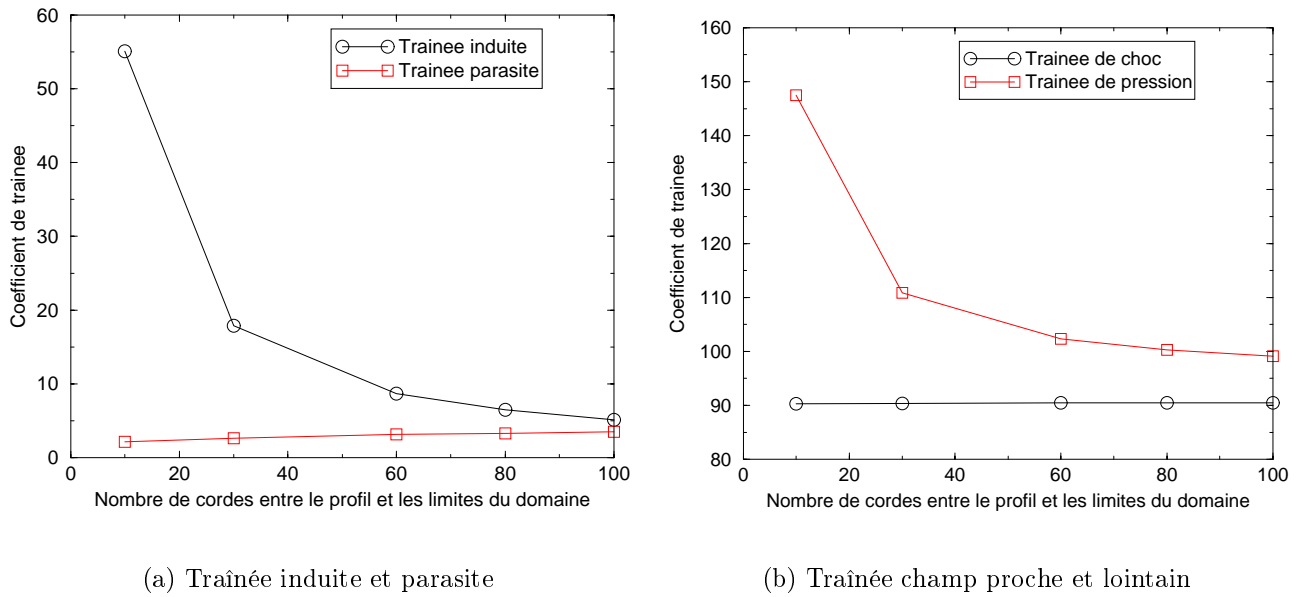


FIG. 3.6 – Evolution des composantes de traînée par rapport à la distance entre les limites du domaine de calcul et le profil à iso-portance (cas RAE2822  $M=0.73$  Euler)

### 3.1.3 Écoulement transsonique autour d'une aile

#### 3.1.3.1 L'écoulement

L'aile ONERA M6 est étudiée avec un nombre de Mach de 0.84 et un angle d'incidence de  $3.0^\circ$ . Grâce à l'iso-mach de la figure 3.7, nous devinons un choc en lambda sur l'extrados de l'aile ONERA M6. Du point de vue des composantes de traînée, nous rajoutons une autre production physique de traînée par rapport au cas précédent : la traînée induite. Les deux seules productions physiques de traînée seront la traînée de choc et la traînée induite.

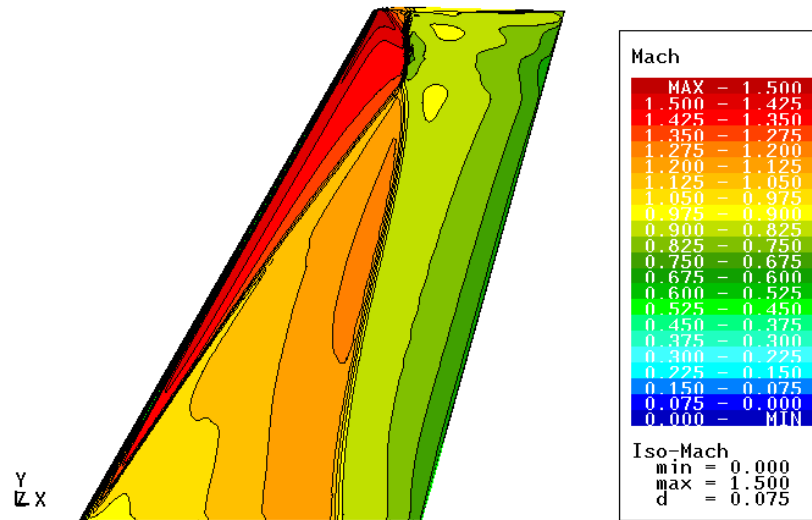
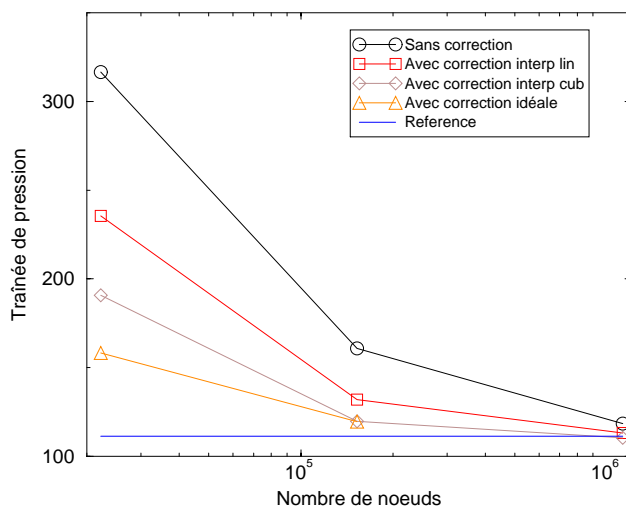
Pour ce cas test, nous étudions la correction adjointe sur les coefficients de traînée de pression (champ proche) induite et de choc. Par la suite, nos résultats vont être comparés à ceux de la littérature. Pour conclure, les approches champs proche et champs lointain vont être comparées et l'ordre de discrétisation par rapport à l'extrapolation de Richardson sera calculé.

#### 3.1.3.2 Correction adjointe

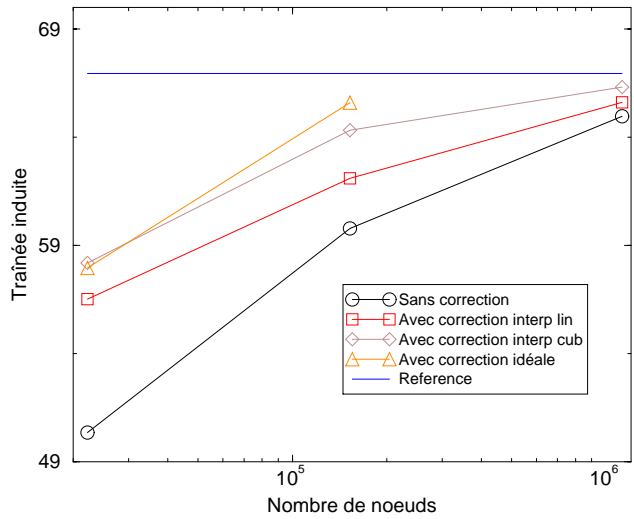
##### Correction adjointe

Nous pouvons encore remarquer un bon comportement de la correction adjointe pour la traînée induite (fig. 3.8(a)) et la traînée de pression calculée avec l'approche champ proche (fig. 3.8(b)).

Contrairement à la traînée induite où le domaine de calcul change peu entre deux raffinements de maillages successifs, le domaine d'intégration de la traînée de choc change énormément (voir figure 3.9). Sur l'image 3.9(a), juste une partie du choc en lambda est détectée. La correction adjointe est fautive si elle est calculée avec comme base ce domaine. La correction adjointe a alors été calculée comme dans l'exemple précédent avec l'équation 2.41. Cette correction peut-être comparée à la correction que l'on aurait obtenu en gardant le domaine d'intégration du maillage grossier sur la figure 3.10(a).

FIG. 3.7 – Iso-mach Aile ONERA M6  $M=0.84$   $\alpha=3.0^\circ$ 

(a) Trainée de pression champ proche



(b) Trainée induite

FIG. 3.8 – Correction de coefficient aérodynamique avec 3 maillages de raffinement différents (Aile ONERA M6 Euler)

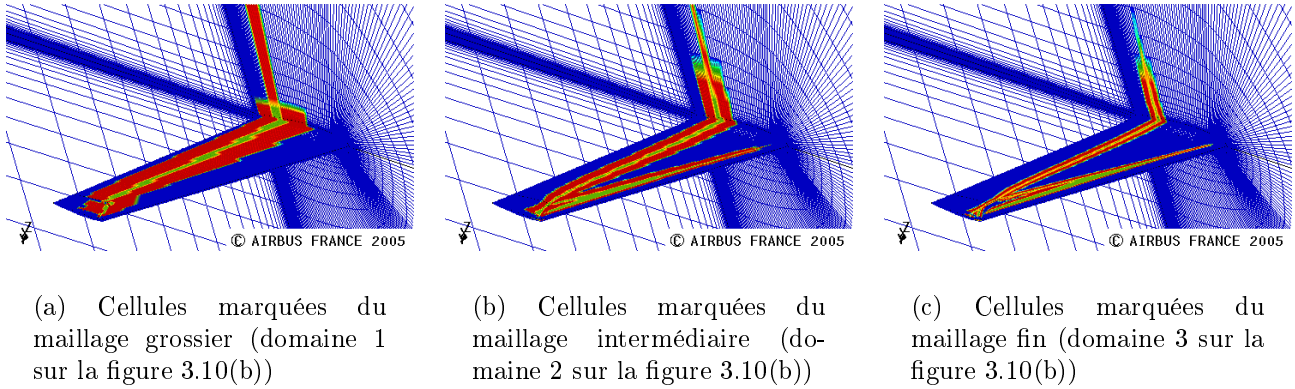


FIG. 3.9 – Cellules marquées pour le calcul de la traînée de choc avec 3 maillages différents (aile ONERA M6 Euler)

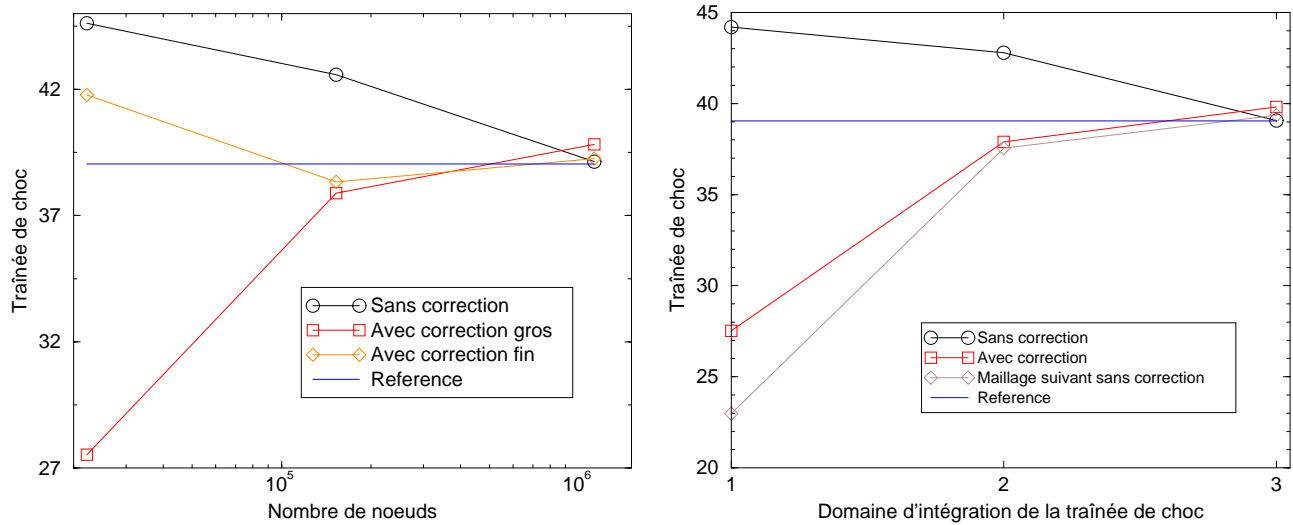
Cependant, pour montrer que la correction adjointe ne donne pas un résultat *faux* avec le domaine du maillage grossier ( $D_H$ ), nous avons calculé la traînée de choc que l'on aurait obtenue si l'on avait gardé le même domaine d'intégration du maillage grossier au maillage fin. Sur la figure 3.10(b), nous pouvons constater que la correction adjointe tend vers la valeur qu'aurait eu la traînée de choc si nous avions gardé le domaine d'intégration du maillage grossier ( $D_H$ ) pour le maillage fin. De ce point de vue la correction adjointe est *juste* mais ce n'est pas le résultat que nous recherchons.

### Comparaison avec les données de la littérature

Cette configuration avec ces conditions d'écoulement a été largement utilisée comme cas test dans la littérature. Nous avons rassemblé ces différents résultats pour la traînée de pression champ proche sur la figure 3.11. Tout d'abord, les courbes en noir (Kim), sont extraites de l'article de Hyoung-Jin Kim [38]. Ensuite les courbes en rouge (Ravi), sont extraites de la thèse de Ravishankar Balasubramanian [7]. Les courbes en bleu (Park), sont extraite de l'article de Michael Andrew Park [51]. Pour terminer, les courbes en violet (Barthet), sont nos résultats. Pour plus de clarté, nous n'avons représenté que les courbes de convergence en maillage sans correction, celles avec correction (interpolation d'ordre élevée) et pour terminer les valeurs limites ou "idéales" qui devraient être obtenues si l'on pouvait avoir la solution continue. Pour Park et Kim, cette valeur limite a été déterminée par l'extrapolation de Richardson tandis que la valeur limite pour cette thèse a été déterminée pour un maillage extrêmement fin. Sur cette figure nous pouvons faire plusieurs remarques :

- **même convergence** : même si les maillages et les codes de calcul sont différents les solutions convergent toutes vers la même valeur limite ou "idéale". La différence entre les deux valeurs extrêmes de convergence n'est que de 3 points de traînée.
- **même tendance** : il y a une grande disparité quand les maillages sont grossiers qui s'amenuise lorsque les maillages deviennent plus fins.
- **correction adjointe** : on retrouve une amplitude de la correction adjointe assez uniforme entre les différentes études, sauf pour les maillages plus grossiers où cette thèse fait apparaître une correction adjointe de plus grande amplitude mais avec un résultat sans correction plus mauvais que celui des autres études.





(a) Correction adjointe avec domaine du maillage et du maillage grossier

(b) Evolution de la trainée de choc en fonction du domaine d'intégration défini sur la figure 3.9

FIG. 3.10 – Etude de la trainée de choc (Aile ONERA M6 Euler)

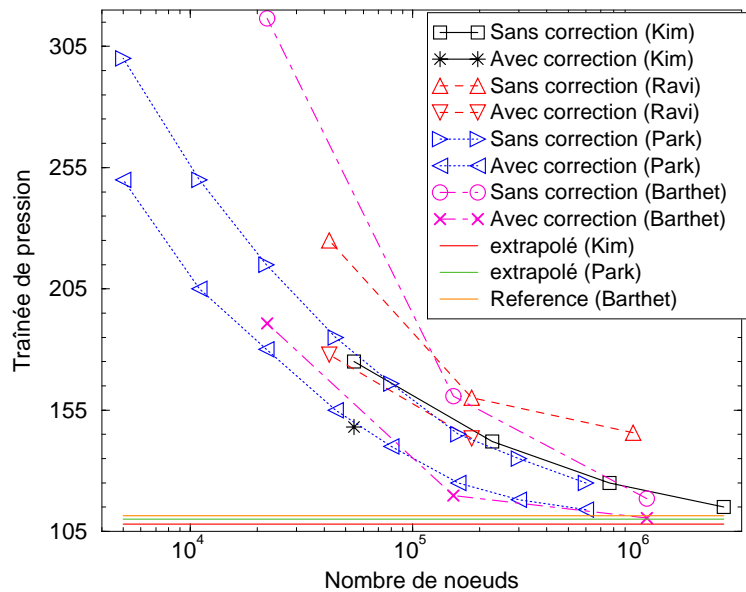


FIG. 3.11 – Comparaison de la correction adjointe avec les résultats de la littérature (Aile ONERA M6 Euler)

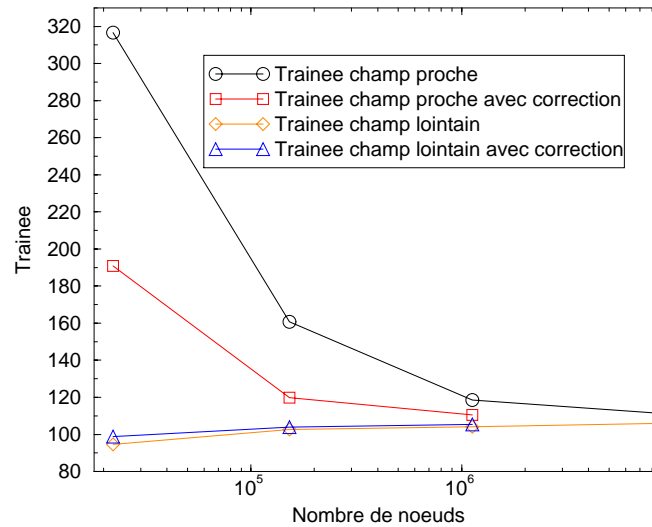


FIG. 3.12 – Evolution des coefficients de traînée champs proche et lointain (Aile ONERA M6 Euler)

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	1.881	2.930	118.5	102.7	110.4	109.1
2-3-4	2.578	/	111.4	109.9	/	/

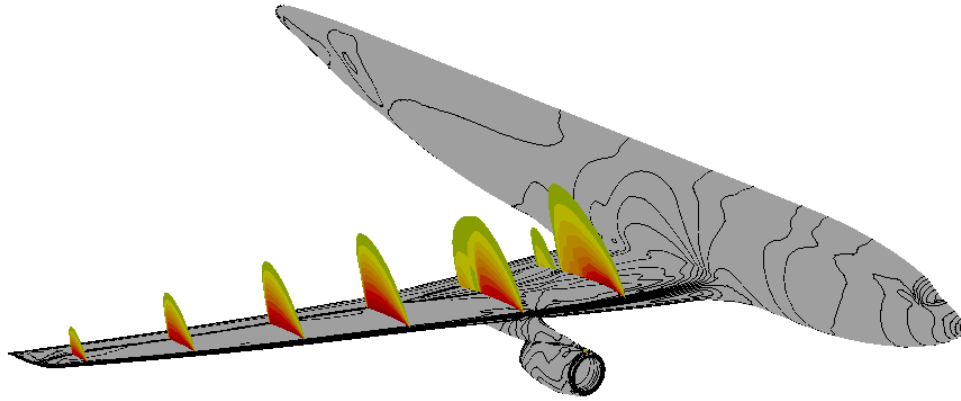
TAB. 3.6 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour l'Aile ONERA M6 Euler (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 4 : maillage le plus fin)

### Convergence entre l'approche champ proche et champ lointain

Sur la figure 3.12, nous pouvons voir que les deux approches de calcul de traînée convergent petit à petit vers la même valeur lorsque le maillage devient de plus en plus fin. Nous pouvons aussi remarquer que la variation de traînée entre deux maillages successifs est plus grande avec une approche champ proche qu'avec une approche champ lointain d'où une très bonne estimation de la traînée en champ lointain dès les premiers maillages grossiers.

### Application de l'extrapolation de Richardson

Pour terminer comme sur les cas en deux dimensions, l'ordre du schéma est déterminé avec l'extrapolation de Richardson généralisée dans le tableau 3.6. Contrairement au cas précédent, seulement quatre maillages ont été utilisés. Malgré tout, nous pouvons faire les mêmes remarques que précédemment, c'est à dire que l'ordre de convergence augmente quand on utilise la correction adjointe. De plus, la correction adjointe donne des résultats moins dépendants de la convergence en maillage. On peut le remarquer sur le premier cas où la correction de Richardson sous-estime la valeur finale de la traînée ce qui n'est plus le cas lorsque l'on utilise des maillages plus fins.

FIG. 3.13 – Iso-mach AS28G  $M=0.80$   $\alpha=2.2^\circ$ 

### 3.1.4 Écoulement transsonique autour d'un avion complet

#### 3.1.4.1 L'écoulement

Le cas de l'AS28G est assez proche d'un cas industriel avec un fuselage, une aile, un mât et une nacelle perméable (fig. 3.13). Avec un nombre de mach de 0.80 et un angle d'incidence de  $2.2^\circ$ , nous nous trouvons dans un écoulement transsonique avec développement d'un choc en lambda sur l'extrados de l'aile. De part la complexité de la forme et la taille du maillage, nous n'avons pu calculer la correction adjointe que seulement sur 2 maillages, mais un troisième maillage a été généré pour servir de référence.

#### 3.1.4.2 Correction adjointe

Sur la figure 3.14, les courbes de convergence en maillage des coefficients de la portance et du moment de tangage sont représentées ainsi que la correction adjointe associée. Les corrections vont encore une fois dans le bon sens et atteignent quasiment la valeur du maillage suivant. Pour la traînée, la figure 3.15 montre la correction sur le coefficient de traînée champ proche (fig. 3.15(a)) et sur les composantes de la traînée champ lointain (fig. 3.15(b) et 3.15(c)). Pour ces corrections traînées champs lointains il n'y a que la correction avec l'équation 2.41 qui a été montrée car les résultats fournis avec l'autre approche sont très proches.

Au niveau du temps de calcul<sup>2</sup> (tab. 3.7), le résultat du maillage intermédiaire a mis en tout 35 420 secondes (calcul direct + calcul de la correction) alors que le calcul sur le maillage le plus fin a mis 62 340 secondes (seulement calcul direct) pour arriver quasiment au même résultat. De plus sachant que 77% du temps de calcul du maillage avec correction correspond au temps de calcul de l'adjoint qui ne bénéficie pas encore des améliorations dont bénéficie le calcul direct comme le multigrille ou le CFL à pas variable pour accélérer la convergence, les résultats sont très encourageants pour la suite.

<sup>2</sup>Les temps de calcul sont donnés à titre indicatif et sont surtout là pour faire une comparaison entre un calcul simple et un calcul avec correction. Tous les temps de calcul donnés ont été calculés sur la même machine et avec le même nombre de processeurs.

Maillage	Temps partiel		Temps total
	Calcul direct		
Grossier	Calcul direct	685 sec	3585 sec
	Calcul adjoint	2910 sec	
Intermédiaire	Calcul direct	8060 sec	35420 sec
	Calcul adjoint	27360 sec	
Fin	Calcul direct	62340 sec	62340 sec

TAB. 3.7 – Etude des temps de calcul pour le calcul direct et la correction adjointe

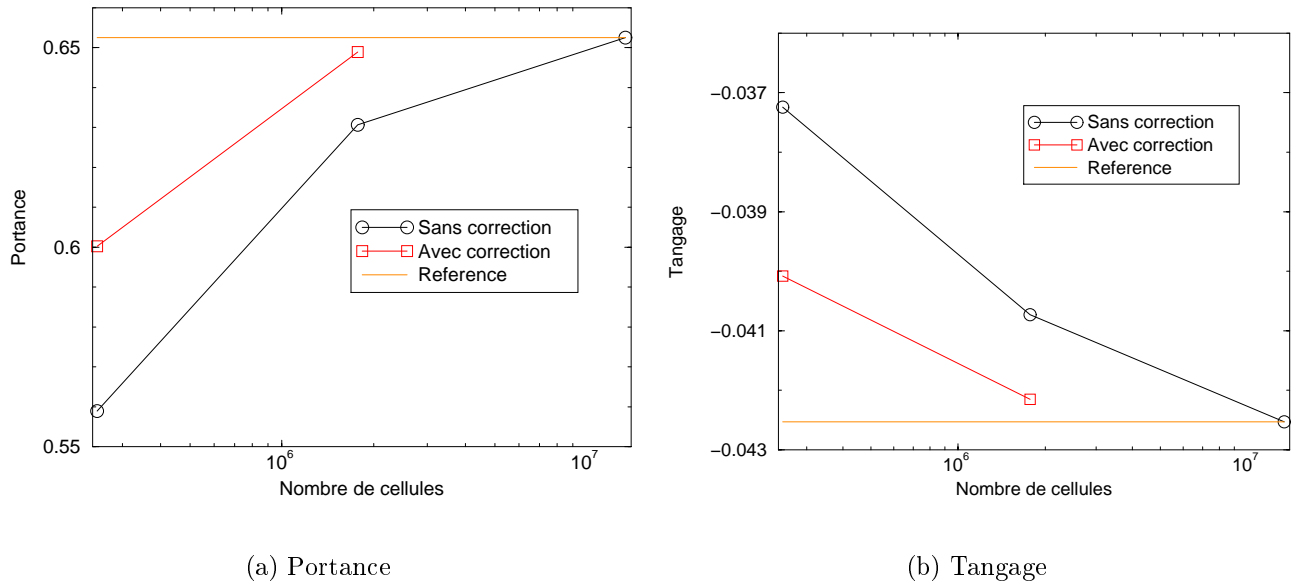


FIG. 3.14 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 2 maillages différents (AS28G Euler)

Malheureusement nous voyons ici les limitations de l'outil développé qui ne peut pas être, pour l'instant, utilisé avec des maillages comportant trop de noeuds. En effet, le calcul du résidu nécessite un passage dans elsA avec le maillage fin. Ceci impliquerait la génération d'un maillage avec 100 millions de noeuds pour le maillage le plus fin si utilisé. Il serait plus aisé de calculer le résidu localement avec un raffinement local, pour diminuer la demande en ressource informatique. Faute de temps le développement n'a pu se faire.

### 3.1.5 Bilan de la correction adjointe sur les écoulements non-visqueux

A travers ces différents exemples, nous avons pu apprécier la correction adjointe avec des cas de plus en plus complexes. Nous avons commencé avec une première configuration 2D subsonique, puis transsonique avec une première correction d'une composante issue de l'approche champ lointain, ensuite un cas 3D transsonique encore assez simple car ne comportant qu'une aile, et pour terminer un avion complet proche des configurations qui étaient amplement utilisées dans l'industrie dans les années 1990. La correction adjointe des composantes champs proches est conforme aux attentes et le processus de calcul de la correction adjointe pour les coefficients aérodynamiques champ lointain est satisfaisant.

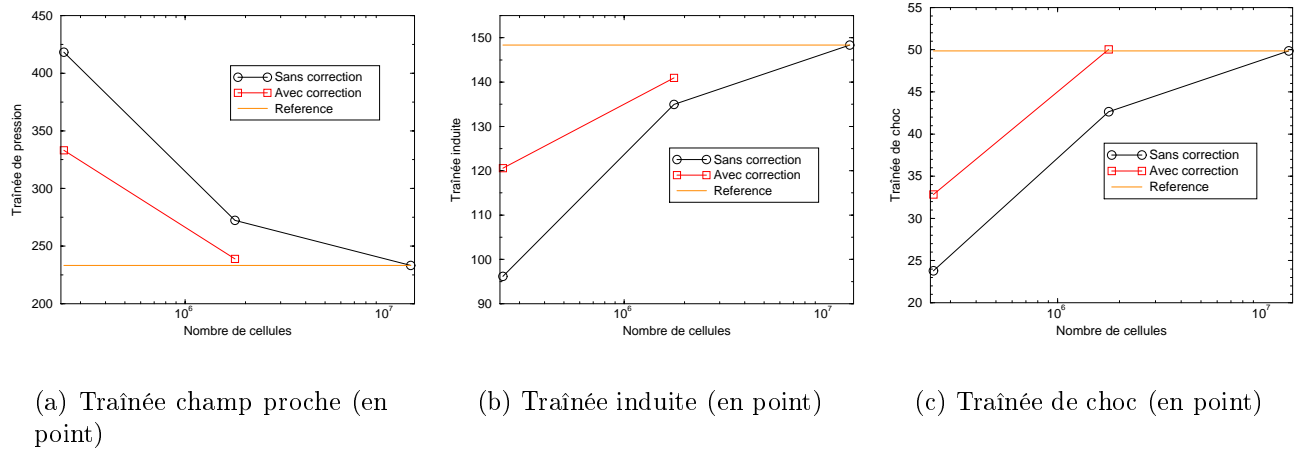


FIG. 3.15 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 2 maillages différents (AS28G Euler)

Au niveau de la comparaison entre les méthodes d'extrapolation de Richardson et la correction adjointe, on peut remarquer que l'ordre de discrétisation du schéma apparent a toujours augmenté lorsque l'on considèrerait les coefficients issus de la correction adjointe. De plus la correction adjointe appliquée aux coefficients aérodynamique donne de meilleurs résultats que l'extrapolation de Richardson qui peut donner des résultats assez aléatoires lorsque l'on ne se trouve pas dans la zone de convergence en maillage. Pour un résultat donné comparable, l'approche avec correction adjointe est faite dans un maillage plus grossier qu'avec l'approche de l'extrapolation de Richardson.

## 3.2 Ecoulements visqueux - approche RANS

L'augmentation de puissance des ordinateurs a permis l'introduction des modèles de turbulence évolués dans les codes de calcul d'aérodynamique pour les écoulements visqueux et turbulents. La CFD est ainsi devenue la norme en aérodynamique. L'outil de calcul de la correction adjointe doit alors être capable de traiter les maillages dit Navier-Stokes. Pour ce faire, nous allons suivre la même stratégie que pour les fluides non-visqueux, commencer par une configuration assez simple pour terminer par une configuration de type industriel.

La première configuration étudiée sera le profil RAE2822 ( $Re=6\,300\,000$   $M=0.6$   $\alpha=2.05^\circ$ ) extrait de la base de données AGARD [19] (cas 3). L'écoulement est subsonique, nous avons donc par rapport au cas non-visqueux l'apparition de la traînée de frottement et la traînée de pression visqueuse. Grâce à cet exemple, la correction adjointe aura été appliquée à l'ensemble des composantes de traînée pour les approches champs proche et lointain. Ensuite, nous étudierons un profil d'aile avec une forme de givre induisant une recirculation au bord d'attaque ( $Re=4\,454\,400$   $M=0.2$   $\alpha=0.0^\circ$ ). Ce cas nous permettra de voir le comportement de la correction adjointe avec des zones de recirculation. La configuration suivante est issue de la même base de données que le cas AGARD précédent (cas 6), la différence vient du fait que l'écoulement sera cette fois transsonique ( $Re=6\,500\,000$   $M=0.725$   $\alpha=2.70^\circ$ ). La correction adjointe va alors pouvoir être testée sur une configuration avec un choc et une couche limite. L'évolution naturelle est de

passer à une aile 3D avec l'aile ONERA M6 ( $Re=11\,720\,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$ ). Par la suite, la complexité de la configuration AS28G ( $Re=1\,413\,000$   $M=0.80$   $\alpha=2.2^\circ$ ) sera un exemple de forme qui est étudié dans un contexte industriel. Enfin nous testerons la correction adjointe sur un avion complet (fuselage, aile, mât et nacelle motorisée) étudié par Airbus pour valider complètement l'utilisation de la correction adjointe dans un contexte industriel.

### 3.2.1 Génération des maillages Navier-Stokes

Pour la génération des maillages Navier-Stokes, une stratégie différente de celle utilisée pour les maillages de type Euler a été appliquée. En effet, la théorie de la correction adjointe n'est valable que si les phénomènes physiques sont déjà assez bien définis dans l'écoulement. Si on peut garantir une bonne définition de la couche limite pour le maillage fin, on ne peut pas garantir sa bonne définition pour le maillage le plus grossier. Un mauvais maillage pour la couche limite entraînera une mauvaise représentation physique de celle-ci et donc une correction adjointe fautive. On peut aussi imaginer faire une couche limite extrêmement fine pour le maillage le plus fin de façon à pouvoir conserver un raffinement convenable pour le maillage le plus grossier. Malheureusement dans ce cas là nous allons être confrontés à des problèmes numériques de convergences (taille des cellules trop petites, développement de structures instationnaires,...) ou des problèmes de limite d'utilisation du modèle de turbulence. Pour toutes ces raisons, la génération des maillages Navier-Stokes a été faite à partir du maillage Euler correspondant de la partie précédente et nous avons généré une couche limite à chaque fois ainsi que son maillage fin associé. Par exemple pour le cas RAE2822, au lieu d'avoir utilisé quatre maillages de type Euler, il a fallu en générer huit dans le cas Navier-Stokes.

Pour certaines configurations, nous avons effectué des convergences en maillage rigoureuses sans faire de correction adjointe. Cette étude est montrée dans l'annexe B.

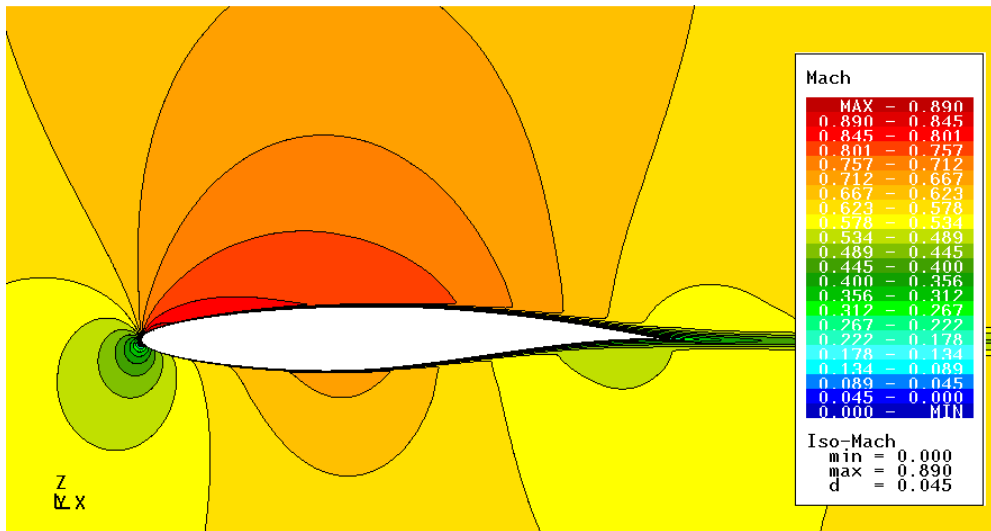
### 3.2.2 Ecoulement subsonique autour d'un profil d'aile

#### 3.2.2.1 L'écoulement

Le profil RAE2822 dans un écoulement avec un nombre de Reynolds de  $6\,300\,000$ , un nombre de Mach de  $0.6$  et un angle d'attaque de  $2.05^\circ$  est issue du cas 3 de la référence [19]. Avec ce premier cas subsonique visqueux (fig. 3.16), nous pouvons introduire la dernière composante physique de traînée : la traînée visqueuse. Cette traînée se compose de la traînée de frottement et de la traînée de pression visqueuse en champ lointain. La correction adjointe va pouvoir être appliquée sur ces deux derniers coefficients aérodynamiques.

#### 3.2.2.2 Correction adjointe

La correction adjointe donne de bons résultats pour les coefficients de portance, tangage, traînée de frottement, traînée de pression champ proche et traînée de pression visqueuse (figures 3.17 et 3.18). Il est intéressant de remarquer le bon comportement de la correction adjointe appliquée aux coefficients de portance et du moment de tangage. En effet, au début de la convergence en maillage (maillage très grossier) le coefficient de portance, par exemple, est surestimée. Au dernier maillage (maillage le plus fin), elle est sous-estimée. Malgré tout, la correction adjointe tend toujours vers le calcul de référence.

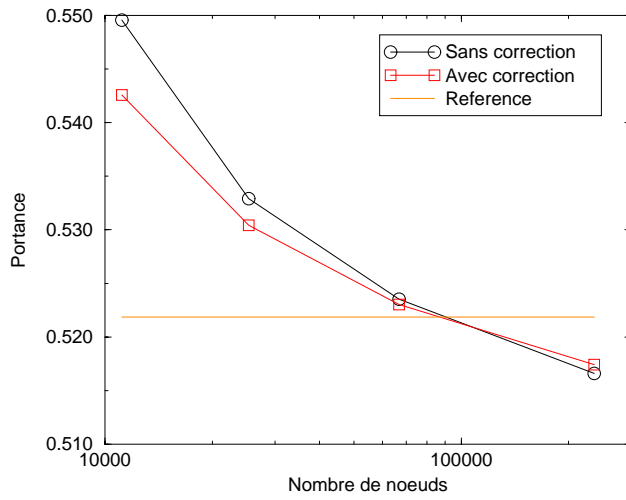
FIG. 3.16 – Iso-mach RAE2822  $Re=6\,300\,000$ ,  $M=0.6$ ,  $\alpha=2.05^\circ$ 

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	0.323	0.430	112.3	67.4	106.1	100.2
2-3-4	2.206	1.907	109.8	109.1	105.5	105.3

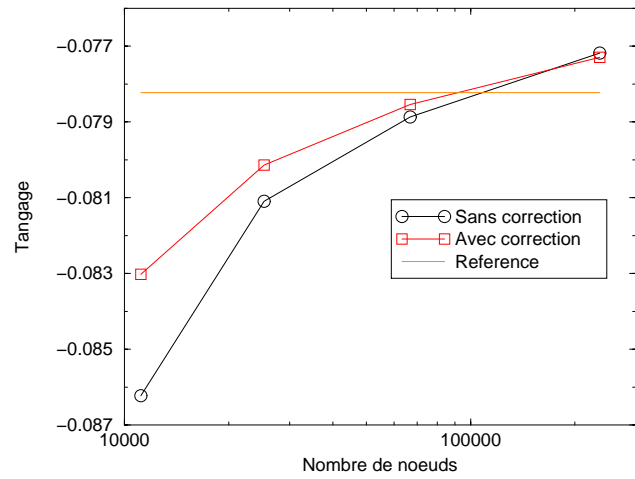
TAB. 3.8 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour la RAE2822  $Re=6\,300\,000$ ,  $M=0.6$  (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 4 : maillage le plus fin)

Au niveau de la traînée de pression visqueuse, il n'y a quasiment aucune différence entre les volumes d'intégration du maillage grossier et du maillage fin. En effet, pour chaque maillage il a fallu refaire une assez bonne couche limite pour avoir la physique de l'écoulement ce qui fait que l'on a une bonne définition de la couche limite et du sillage d'où une faible variation du domaine d'intégration entre les maillages.

Le tableau 3.8 montre, comme dans le cas non-visqueux, la précision du schéma calculé avec l'extrapolation généralisée de Richardson. Nous pouvons déjà remarquer que pour les maillages 1-2-3, l'ordre du schéma est loin de la valeur théorique de 2. Le maillage le plus grossier n'est sûrement pas dans la partie asymptotique de la convergence en maillage. C'est pour cela que la correction de Richardson ne donne pas de bons résultats. L'ordre augmente quand l'on prend les résultats où l'on a appliqué la correction adjointe tout en restant éloigné de la valeur théorique. La valeur du coefficient de traînée avec le meilleur maillage est de 103.5 points. La correction adjointe dans ce cas est plus performante que l'extrapolation de Richardson.

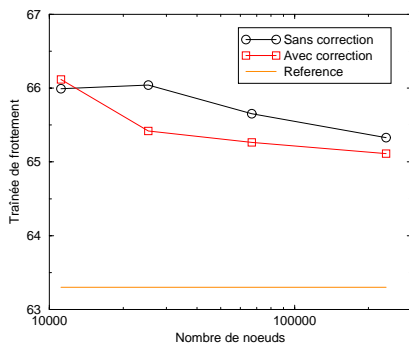


(a) Portance

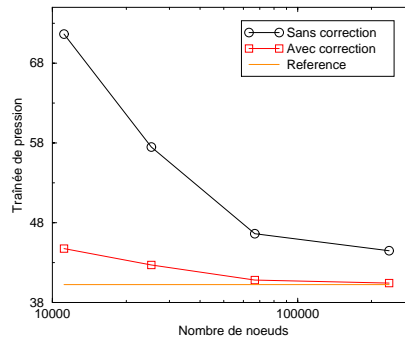


(b) Tangage

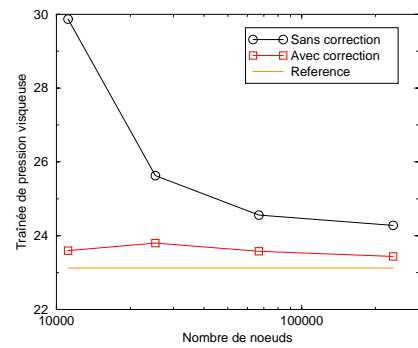
FIG. 3.17 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 4 différents maillages (RAE2822 NS subsonique)



(a) Trainée de frottement (en points)



(b) Trainée de pression (en points)



(c) Trainée de pression visqueuse (en points)

FIG. 3.18 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 4 différents maillages (RAE2822 NS subsonique)



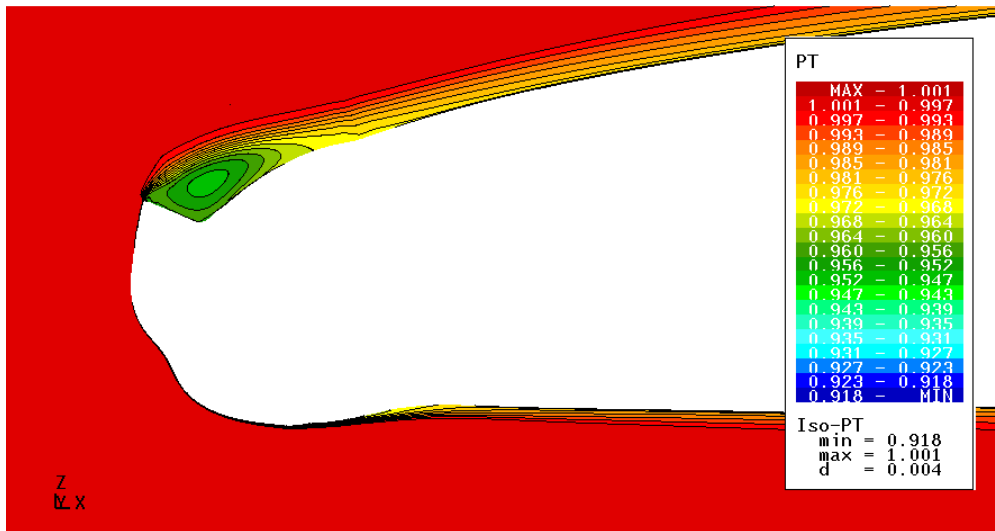


FIG. 3.19 – Iso-PT bord d'attaque du profil d'aile avec forme de givre

### 3.2.3 Écoulement subsonique autour d'un profil d'aile avec forme de givre

#### 3.2.3.1 L'écoulement

Le profil d'aile avec forme de givre ( $Re=4\,454\,400$ ,  $M=0.2$ ,  $\alpha=0.0^\circ$ ) est le cas C de la base de donnée GARTEUR-AG32 [55]. Sur cette configuration une forme de givre se trouve au bord d'attaque du profil (fig. 3.19). Cela induit une grande recirculation à l'extrados que l'on peut voir sur la figure grâce aux isobandes de pression totale, ainsi qu'une plus petite à l'intrados. La difficulté de ce cas réside dans la recirculation qui pourrait faire diverger le calcul de l'adjoint discret à ce nombre de Reynolds. Nous allons montrer que le code utilisé traite ce cas décollé. La traînée de pression visqueuse est la seule composante de la traînée champ lointain dans ces conditions d'écoulement.

#### 3.2.3.2 Correction adjointe

Pour des raisons de confidentialité les échelles ne sont pas montrées. La figure 3.20 montre les corrections pour les composantes champ proche (traînée champ proche, portance et tangage). La correction adjointe se comporte bien même lorsque la convergence n'est pas asymptotique comme sur la portance et le tangage. Nous n'avons pas représenté la correction adjointe pour la traînée de pression visqueuse car les résultats calculés sont assez inhabituels. Nous avons une correction 100 fois supérieure à l'ordre de grandeur de la traînée de pression visqueuse ce qui est un résultat objectivement faux. Nous avons recherché les raisons de cette anomalie.

Un zoom sur la figure 3.21 montre qu'une partie de la recirculation est oubliée dans la détermination des zones à intégrer pour le calcul de la traînée de pression visqueuse car le rapport  $\mu_t/\mu$  est faible. L'impact au niveau du résultat sur la traînée champ lointain est assez faible mais au niveau du calcul du vecteur adjoint, ces trous vont donner un vecteur adjoint d'une grande intensité en haut du pic de givre (voir figure 3.22(b)). Pour faire une comparaison, sur la figure 3.22, la première composante du vecteur adjoint par rapport à la traînée de pression

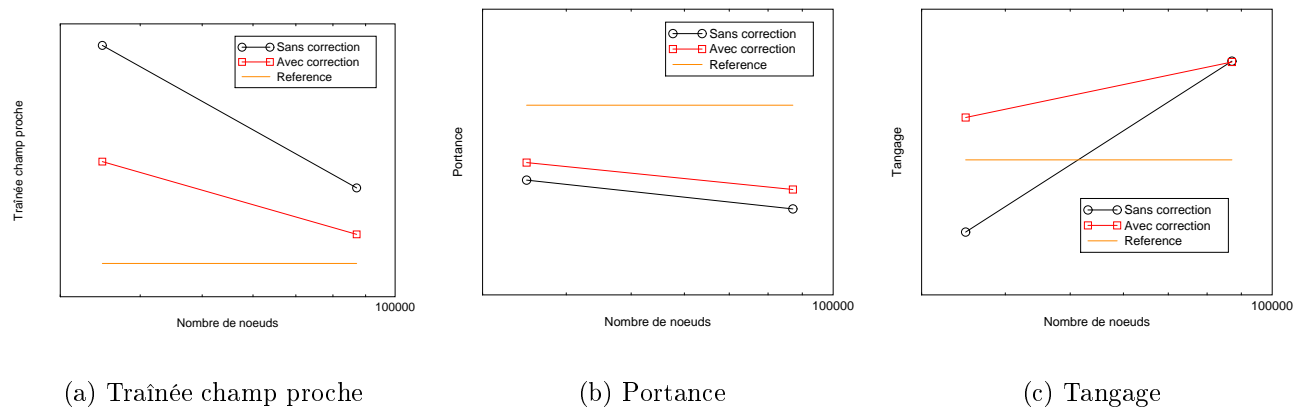


FIG. 3.20 – Correction des coefficients aérodynamiques (Profile d'aile avec forme de givre)

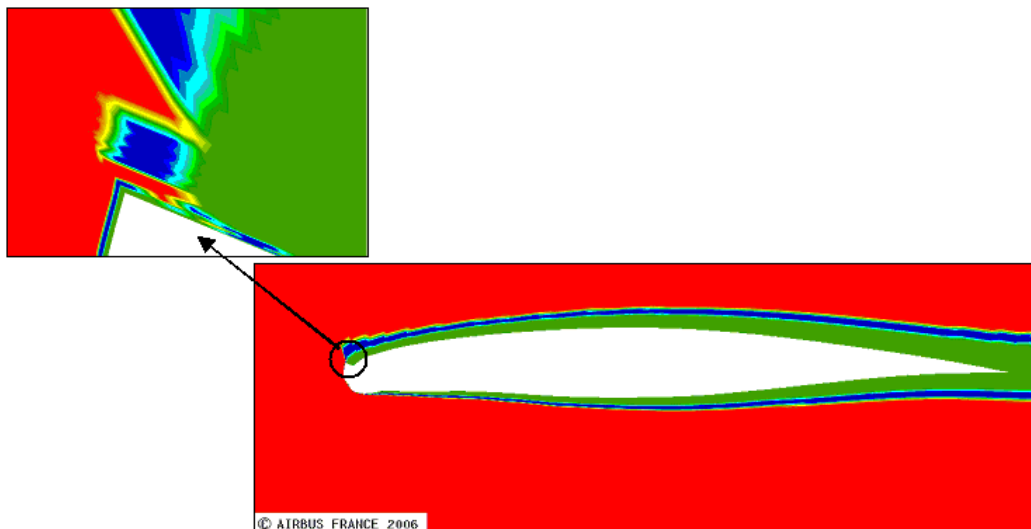
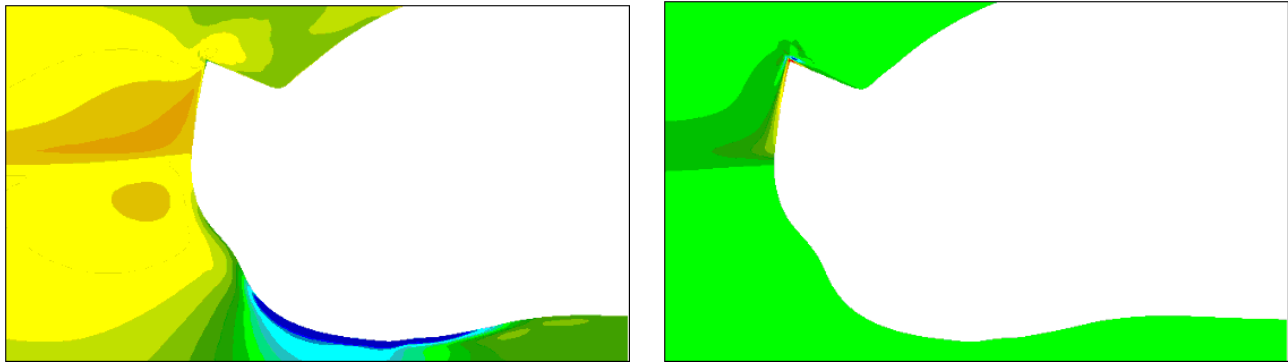


FIG. 3.21 – Zone d'intégration de la traînée de pression visqueuse (rouge : zone non intégré, vert : zones déterminées par les critères physique, bleu : marges appliquées aux zones vertes)

champ proche et la traînée de pression champ lointain sont montrées côte à côte. La différence entre ces deux vecteurs est flagrante du point de vue de la topologie alors que ces deux grandeurs devraient être relativement proches. Une autre différence importante est qu'en moyenne le vecteur adjoint associé à la traînée de pression visqueuse est 100 fois plus grand que celui associé à celui de la traînée de pression champ proche. Ces indices montrent bien que le marquage des cellules pour un cas décollé est assez performant pour calculer la traînée champ lointain mais qu'il ne l'est pas assez pour utiliser la correction adjointe. Une solution serait d'utiliser un critère pour détecter les tourbillons et les marquer, par exemple avec le critère  $Q$  par exemple. Cependant cela demande un gros développement qu'il n'a pas été possible de faire pendant la thèse. C'est une perspective importante.



(a) Adjoint avec la traînée de pression champ proche

(b) Adjoint avec la traînée de pression visqueuse

FIG. 3.22 – Isobande de la première composante du vecteur adjoint au bord d'attaque avec 2 fonctions objectifs différentes

### 3.2.4 Écoulement transsonique autour d'un profil d'aile

#### 3.2.4.1 L'écoulement

Le profil RAE2822 avec un nombre de Reynolds de 6 500 000, un nombre de Mach de 0.725 et un angle d'attaque de  $2.70^\circ$  est tiré du cas 6 de la référence [19]. L'écoulement est transsonique (fig. 3.23) et un choc se développe sur l'extrados du profil. Le choc entre en interaction avec la couche limite qui s'épaissit alors. Le maillage doit être suffisamment fin pour capturer l'épaississement de la couche limite. On peut espérer ainsi une correction adjointe performante dès lors que le phénomène physique est bien représenté.

#### 3.2.4.2 Correction adjointe

La correction adjointe donne des résultats satisfaisants pour les coefficients de portance, du moment de tangage et de traînée de frottement (fig. 3.24) ainsi que pour les composantes de traînée champ proche et lointain (fig. 3.25). On peut remarquer que la correction sur le coefficient de traînée de choc est assez bonne avec l'utilisation du volume d'intégration du maillage plus fin. La correction sur la traînée de choc avec le volume d'intégration du maillage grossier est aussi satisfaisante. En fait la production de traînée parasite autour du choc est moins importante avec le raffinement de maillage que dans le cas non-visqueux. Le comportement de la traînée de pression visqueuse est similaire au cas précédent où la couche limite et le sillage sont bien définis.

Le tableau 3.9 démontre que les maillages les plus grossiers ne sont pas dans la convergence asymptotique de la traînée. Cela doit être dû à la présence du choc qui nécessite plus de mailles. Malgré tout, la correction adjointe donne de bon résultat et se rapproche de la valeur de 155.0 points de traînée obtenue avec notre maillage le plus fin. Le seul cas où l'extrapolation de Richardson peut être considérée comme acceptable est le cas avec les maillages 2-3-4. Sur ce cas la combinaison entre la correction adjointe et de Richardson donne un résultat très proche de celui calculé avec le maillage le plus raffiné. Avec les deux cas bidimensionnels RAE2822 précédent, nous voyons les limites d'utilisation de l'extrapolation de Richardson qui implique que le maillage le plus grossier soit déjà dans la partie de convergence asymptotique du coefficient

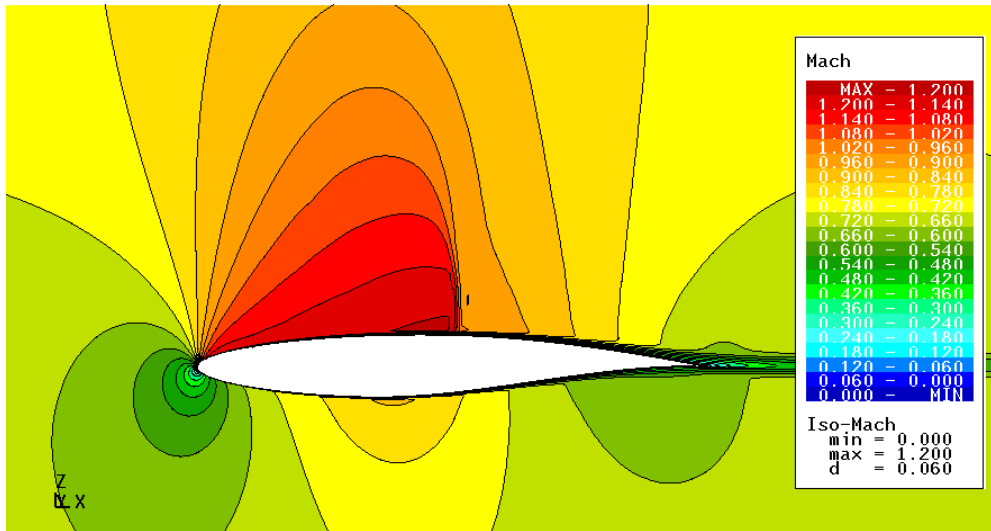
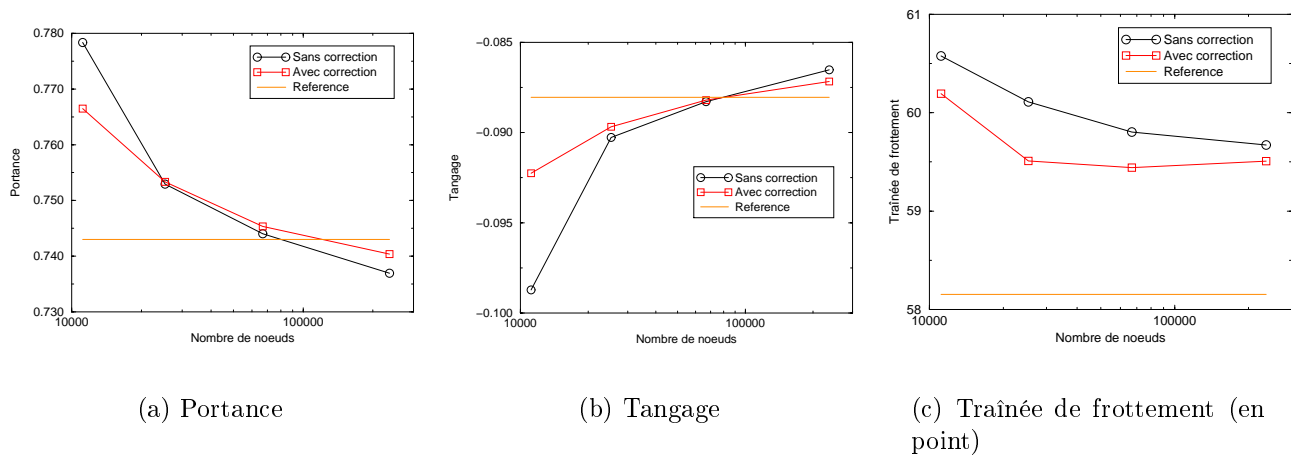
FIG. 3.23 – Iso-mach RAE2822  $Re=6\,500\,000$ ,  $M=0.725$ ,  $\alpha=2.70^\circ$ 

FIG. 3.24 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 4 différents maillages (RAE2822 NS transsonique)

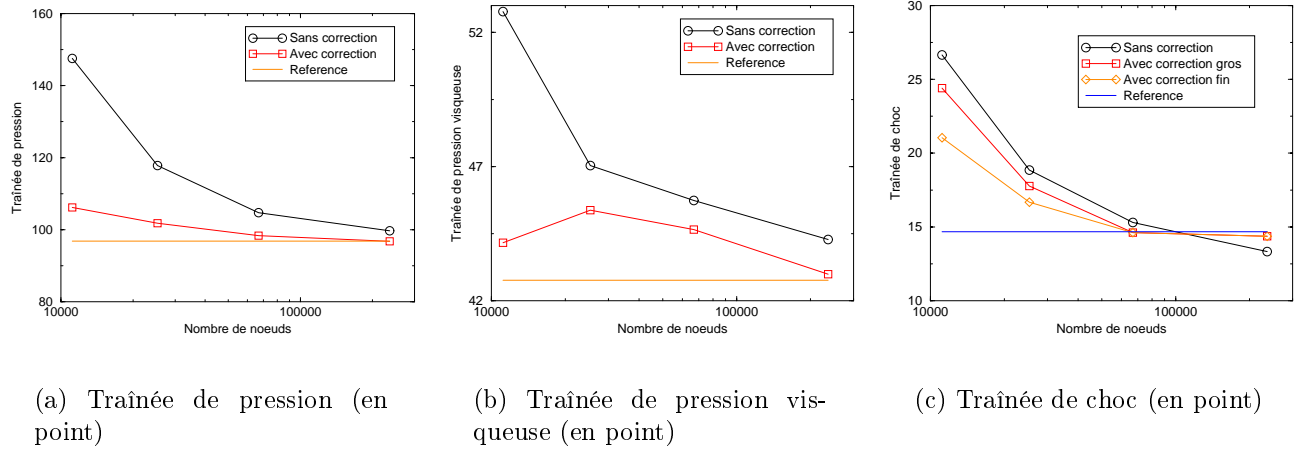


FIG. 3.25 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 4 différents maillages (RAE2822 NS transsonique)

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	1.174	0.480	164.5	153.8	157.7	148.6
2-3-4	1.382	1.362	159.4	156.2	156.3	155.4

TAB. 3.9 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour la RAE2822  $Re=6\,500\,000$ ,  $M=0.725$  (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 4 : maillage le plus fin)

considéré. La correction adjointe semble avoir moins de contrainte de ce point de vue.

L'extrapolation de Richardson n'a pu être pratiquée sur les coefficients de portance et de tangage car la monotonie de la convergence n'est pas vérifiée, alors que l'on a très bien pu appliquer la correction adjointe à ces coefficients aérodynamiques.

### 3.2.5 Écoulement transsonique autour d'une aile

#### 3.2.5.1 L'écoulement

Le cas de l'aile ONERA M6 ( $Re=11\,720\,000$ ,  $M=0.8395$  et  $\alpha=3.06^\circ$ ) est extrait de [60]. Nous retrouvons comme pour le cas non-visqueux le choc en lambda sur l'extrados de l'aile ONERA M6 (fig. 3.26). Dans cet écoulement toutes les composantes de traînée sont représentées c'est le premier cas complet de ce point de vue. La difficulté de cette configuration réside dans la bonne capture du sillage qui peut sortir de la zone de calcul que l'on a déterminé à la construction du maillage. De ce fait pour une bonne détermination de la correction adjointe, le maillage doit être assez fin pour capturer le tourbillon de bout d'aile, le choc en lambda, la couche limite et le sillage.

#### 3.2.5.2 Correction adjointe

##### Etude avec un premier maillage

Sur la figure 3.27, les corrections sur les coefficients de portance, du moment de tangage, de traînée de frottement et de pression champ proche sont représentées. Pour les corrections des

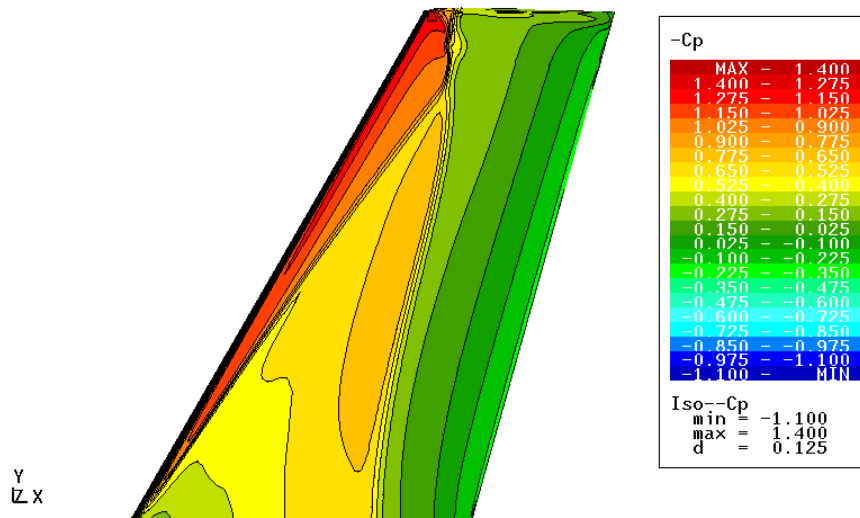


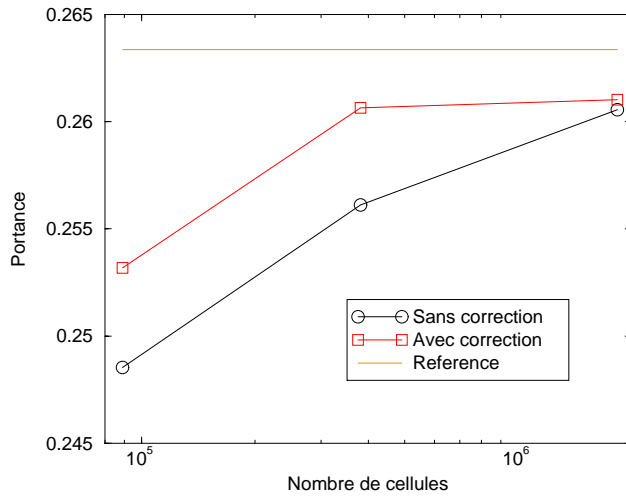
FIG. 3.26 – Iso -Cp Aile ONERA M6  $Re=11\,720\,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$

coefficients de portance et de traînée, les résultats sont conformes à nos attentes. Cependant pour la traînée de frottement et le moment de tangage certaines corrections ne corrigent pas dans le bon sens. Pour la traînée de frottement, la correction est tellement faible que cela n'a que peu d'impact sur la solution générale. Si on regarde les causes de cet écart, on remarque qu'une couche limite mal raffinée à certains endroits joue sur la précision du calcul du résidu et du vecteur adjoint. Nous avons le même problème pour le tangage.

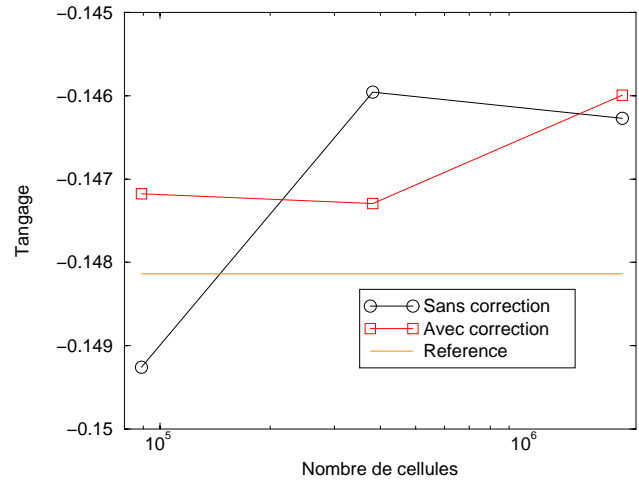
Pour les composantes de la traînée avec une approche champ lointain, les graphiques de la figure 3.28 montrent des corrections qui sont soit faibles soit fausses. Ce problème de correction adjointe vient d'un problème de maillage. A certains endroits du maillage de grands gradients d'espacement de maille existent. Nous avons effectué une coupe perpendiculaire au bord de fuite au niveau du saumon pour les maillages Euler et Navier-Stokes (fig. 3.29). Avec l'introduction de la couche limite et sans évasement de la topologie en C autour de l'aile, un gradient élevé d'espacement a été créé par rapport au cas non-visqueux. Des résidus élevés indépendants de la physique de l'écoulement sont générés dans le volume et le calcul de la correction adjointe est faussé. Dans le cas non-visqueux, les résidus sont plus diffus. Nous pouvons remarquer que l'impact de cette erreur de résidu n'est pas très visible sur les composantes champ proche. Le vecteur adjoint pour les données champs proches a des valeurs élevées près de la peau (là où le maillage est assez bien défini) et plus faibles dans le volume ce qui minimise l'impact des résidus élevés loin de la peau. Au contraire, le vecteur adjoint pour les composantes champ lointain a des valeurs plus élevées dans le volume d'où une grande interaction avec les résidus élevés qui donne des résultats sur la correction un peu aléatoires. Pour confirmer cela une autre étude avec un meilleur maillage doit être effectuée.

### Etude avec un second maillage

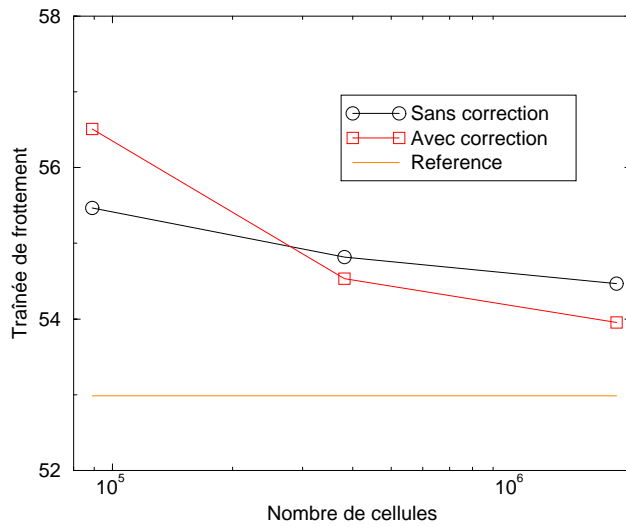
Nous avons décidé de générer un nouveau maillage (maillage 2). Une topologie en C entoure l'aile (exemple sur la figure 3.30). Pour mieux capter le sillage sur le maillage 2, la forme du maillage en C a été élargie à partir de 20% de la corde et un évasement du bord de fuite jusqu'à l'infini. Au contraire, le maillage précédent (maillage 1) possède une topologie en C suivant la



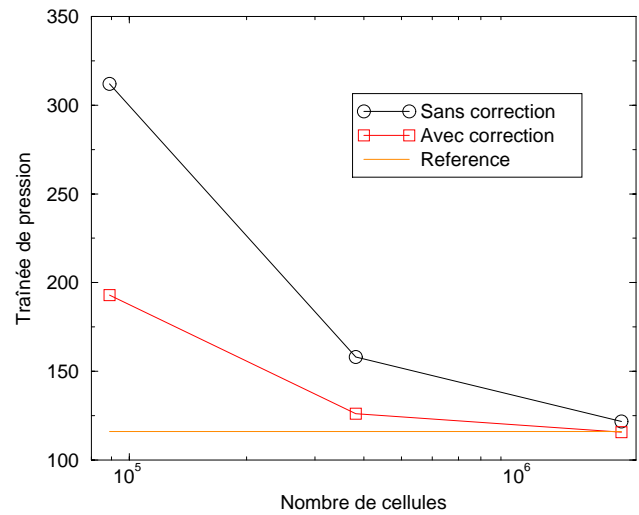
(a) Portance



(b) Tangage

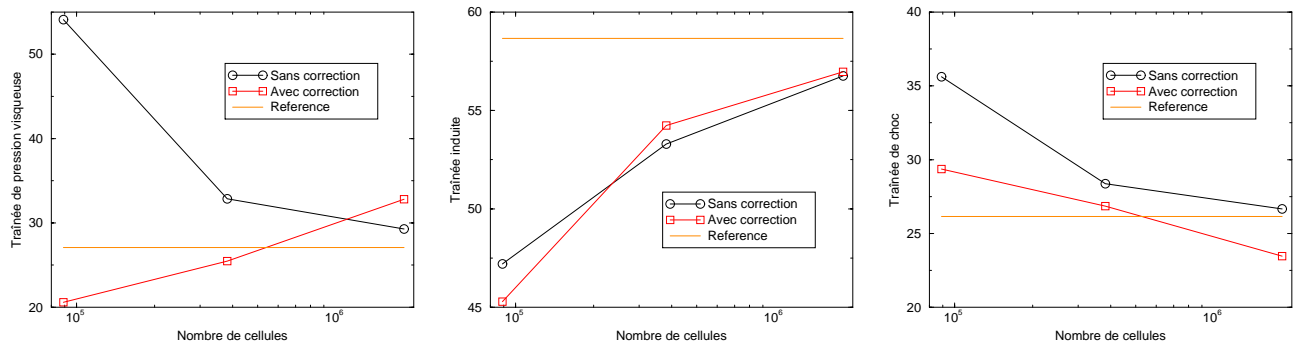


(c) Trainée de frottement (en point)



(d) Trainée de pression (en point)

FIG. 3.27 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 3 différents maillages (Aile ONERA M6 NS)

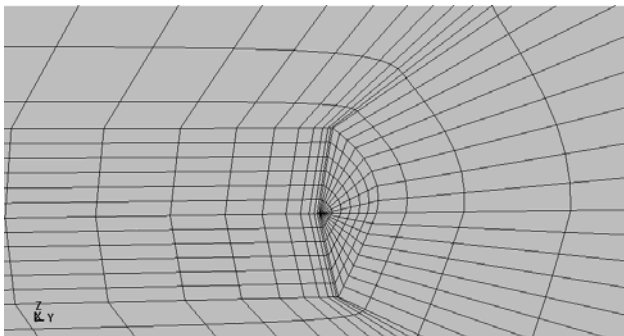


(a) Trainée de pression visqueuse (en point)

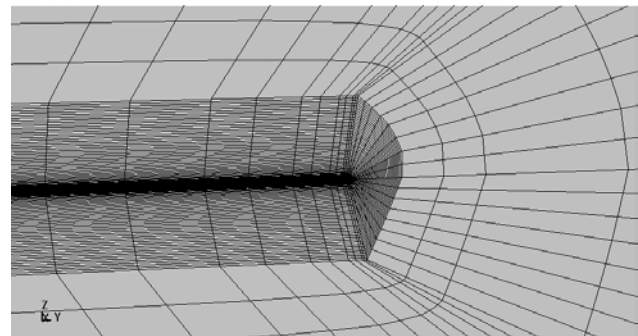
(b) Trainée induite (en point)

(c) Trainée de choc (en point)

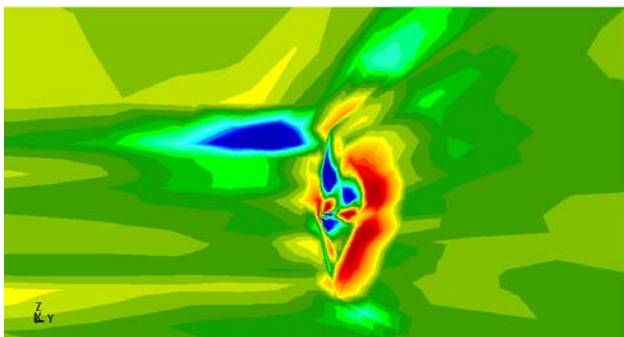
FIG. 3.28 – Correction des composantes de la traînée champ lointain avec 3 maillages différents (Aile ONERA M6 NS)



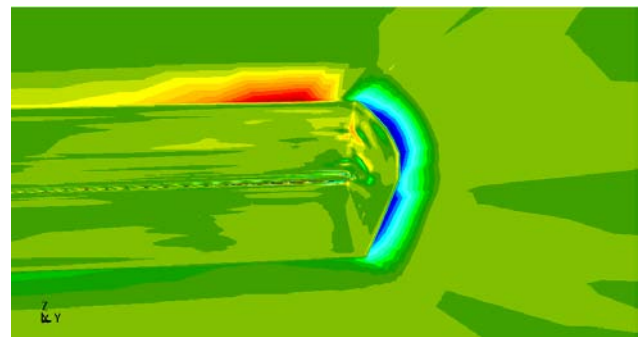
(a) Maillage Euler



(b) Maillage NS



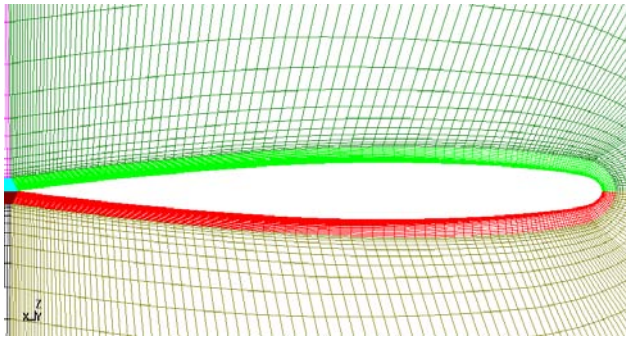
(c) Résidu Euler



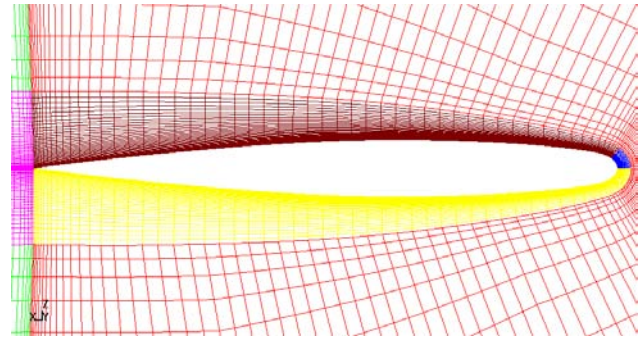
(d) Résidu NS

FIG. 3.29 – Comparaison de la première composante du résidu pour les cas Euler et NS sur un plan de coupe perpendiculaire au bord de fuite au niveau du saumon



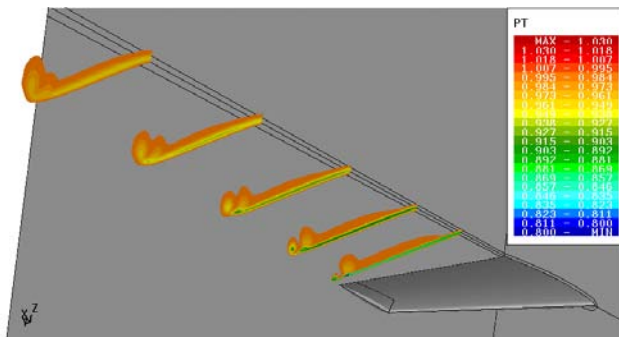


(a) Maillage 1

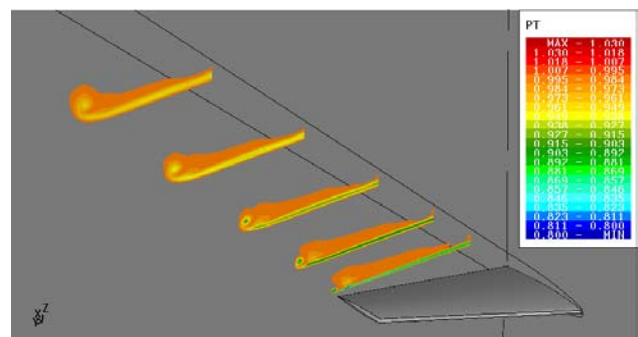


(b) Maillage 2

FIG. 3.30 – Différence au niveau de la topologie C entourant l'aile ONERA M6



(a) Maillage 1



(b) Maillage 2

FIG. 3.31 – Iso-bandes de la pression totale dans différent plan dans le sillage

courbure de l'aile et avec un évasement du bord de fuite à l'infini assez faible. Sur la figure 3.30, nous pouvons voir sur le plan de symétrie la différence entre les deux répartitions de point. Sur le maillage 1 (fig. 3.30(a)), la limite extérieure du C reste à la même distance de l'aile tandis que sur le maillage 2 (fig. 3.30(b)), la limite extérieure du C grandit pour avoir au bord de fuite une taille cinq fois plus élevée que le C du maillage 1.

Cette modification qui se propage dans tout le maillage a bien sûr une influence sur la solution. En traçant les iso-bandes de pression totale pour différent plan de coupe dans le sillage (fig. 3.31), on remarque que le sillage reste dans le C du maillage 2 (fig. 3.31(b)) ce qui n'est pas le cas sur maillage 1 (fig. 3.31(a)). De plus le tourbillon de sillage reste aussi dans le C pour le maillage 2, ce qui peut facilement se voir car la forme du tourbillon est régulière. Au contraire pour le maillage 1, le tourbillon va se propager rapidement en dehors du C dans des mailles plus grosses ce qui dégrade sa résolution et donne une forme allongée du tourbillon. Ces modifications de maillage sont conformes à nos attentes et devraient donner une bonne correction adjointe pour les composantes champs lointains.

La figure 3.32 montre une comparaison de la convergence en maillage avec et sans correction entre l'ancien et le nouveau maillage pour les composantes de traînée de pression visqueuse et induite. Le fait d'avoir mieux capturé le tourbillon de sillage provoque pour la traînée induite une correction plus pertinente (fig. 3.32(a)). Pour la traînée de pression visqueuse (fig. 3.32(b)), la qualité de la prise en compte du sillage donne un résultat avec le maillage grossier déjà proche

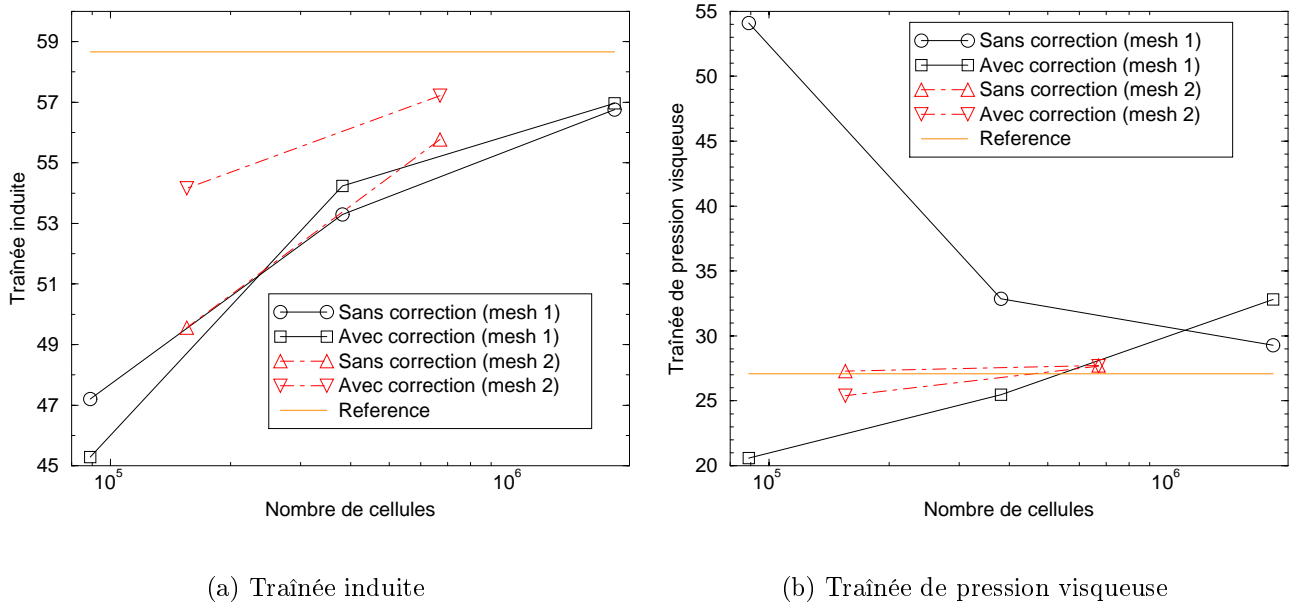


FIG. 3.32 – Correction des composantes traînée champ lointain sur 2 maillages aile ONERA M6 NS différents

du maillage fin. La correction adjointe ne joue pas ici un rôle primordial.

Cette comparaison entre les deux maillages d'aile ONERA M6, nous montre bien la nécessité d'un maillage de qualité à la base pour espérer une correction pertinente. Supposer que les maillages pris en compte permettent une modélisation juste des phénomènes physiques est une hypothèse très forte dans la théorie de la correction adjointe. Cela doit amener à des maillages anticipant de mieux en mieux les zones de l'espace importants pour l'écoulement. La correction adjointe sur les composantes de la traînée champ lointain pourrait alors devenir un bon moyen d'analyse sur la qualité de la production maillage.

### Comparaison avec la littérature

Nous avons comparé nos résultats avec d'autres issues de la littérature. Le seul article trouvé traitant le même cas est celui de Kim [36]. La seule différence est le nombre de Mach à l'infini qui est de 0.84 dans le cas de Kim et 0.8395 dans notre cas. Sur la figure 3.33, nous pouvons déjà remarquer que contrairement au cas non-visqueux la valeur finale ou extrapolée n'est pas la même pour les deux études. C'est un écart de 11 points soit environ 6% de la traînée totale ce qui n'est pas négligeable.

Au niveau de la correction adjointe, nous retrouvons la même amplitude de correction par rapport à la valeur initiale du maillage. Si nous prenons la correction avec le maillage le plus proche en nombre de points de la correction de Kim, la correction adjointe de la présente étude est de 15% alors que celle de Kim est de 10% ce qui est très voisin. Cette comparaison confirme le fait que l'on arrive à reproduire le comportement de la correction adjointe d'une autre étude. L'implémentation de cette correction est validée.

### Application de l'extrapolation de Richardson

Pour terminer, nous avons calculé l'ordre de discrétisation du schéma avec la théorie de

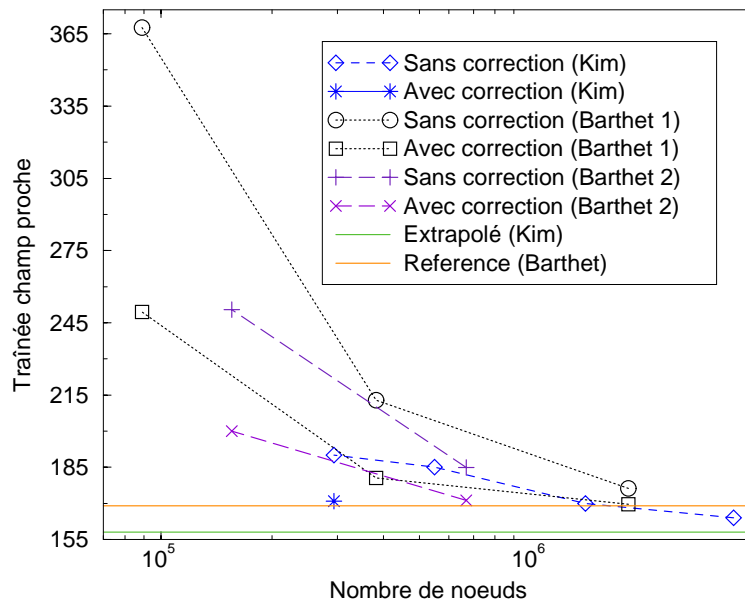


FIG. 3.33 – Comparaison de la correction adjointe avec les résultats de la littérature (Aile ONERA M6 NS)

Maillages	$p_{normal}$	$p_{adj}$	$C_d$	$C_{d_{rich}}$	$C_{d_{adj}}$	$C_{d_{adj+rich}}$
1-2-3	2.077	2.647	176.2	164.8	169.6	167.5
2-3-4	2.349	/	169.0	167.3	/	/

TAB. 3.10 – Ordre de discrétisation par rapport à la traînée pour l'Aile ONERA M6 NS (maillage 1 : maillage le plus grossier, maillage 4 : maillage le plus fin)

Richardson généralisée (tab. 3.10). On peut remarquer que la précision augmente lorsque l'on utilise la correction adjointe. De plus, le résultat de la correction adjointe sur le maillage 3 donne déjà une bonne valeur de la traînée alors que l'extrapolation de Richardson surestime la correction. Ces maillages donnent un ordre de discrétisation proche de la valeur théorique de deux.

## 3.2.6 Écoulement transsonique autour d'un avion complet

### 3.2.6.1 L'écoulement

Nous traiterons ici le cas de l'AS28G ( $Re=1\,413\,000$ ,  $M=0.80$  et  $\alpha=2.2^\circ$ ). La forme se compose d'un fuselage, une aile, un mât et une nacelle perméable. Cette forme est représentative des configurations étudiées dans un contexte industriel. Les liaisons entre les différents éléments de l'avion comme l'aile et le fuselage vont induire des écoulements de coins qui sont souvent difficiles à capter. Dans les conditions de vol considérées, l'écoulement est transsonique et un choc en lambda s'est développé sur l'extrados de l'aile (fig. 3.34). Cependant contrairement à l'exemple de l'aile ONERA M6, l'aile n'est pas isolée. Son écoulement va être perturbé par la nacelle.

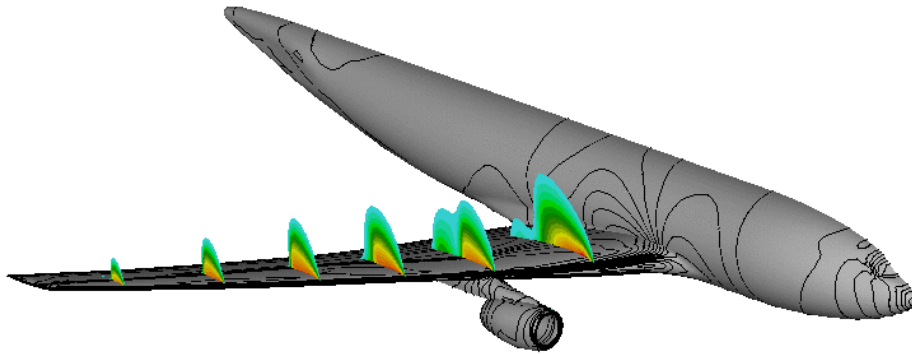


FIG. 3.34 – Iso-cp AS28G  $Re=1\,413\,000$   $M=0.80$   $\alpha=2.2^\circ$

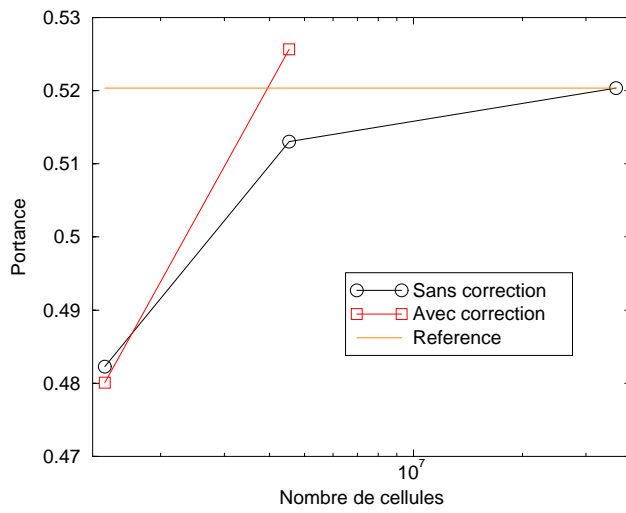
### 3.2.6.2 Correction adjointe

Les coefficients de portance et du moment de tangage sont représentés sur la figure 3.35. Le coefficient du moment de tangage est assez bien corrigé. Cependant, le maillage possédant le moins de cellules pose un problème pour la correction de la portance. Ce problème est directement relié à une erreur au second ordre  $e_{rem}$  du même ordre de grandeur que la correction. La différence entre la correction avec l'interpolation linéaire et celle avec l'interpolation cubique est du même ordre de grandeur que la correction. Les conditions ne sont pas réunies pour pouvoir calculer une bonne correction.

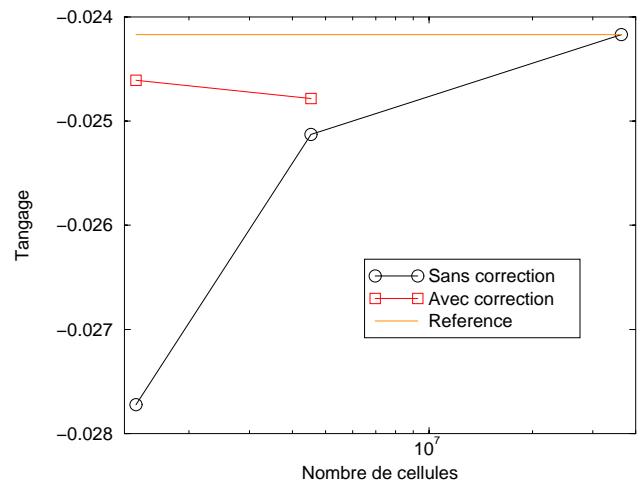
Les coefficients de traînée de frottement et la traînée de pression calculée avec une approche champ proche sont représentées sur la figure 3.36. Pour la traînée de pression, la correction est conforme à la théorie. Ce n'est pas le cas pour la traînée de frottement qui est surestimée. Ce problème vient d'une mauvaise discrétisation de la couche limite à la jonction fuselage/voilure par l'utilisation d'une jonction en C45 (voir figure 3.38(a) pour un exemple de jonction en C45) pas assez raffinée. A cet endroit, on retrouve les résidus les plus élevés.

Les composantes de la traînée champ lointain sont représentées sur la figure 3.37. Une fois encore le fait d'avoir une jonction C45 donne une correction de la traînée de pression visqueuse de mauvaise qualité. Au niveau de la traînée induite, le fait de faire une couche limite induit des gradients assez forts de maillages dans le volume et provoque des résidus forts alors qu'ils ne devraient pas avoir lieu d'être (comme dans le cas de l'aile ONERA M6 NS avec le premier maillage). Pour la traînée de choc la correction est convenable et donne une bonne estimation du maillage suivant.

Ce cas industriel donne de bons résultats et montre la grande importance du maillage pour avoir une solution numérique convenable. Notamment au niveau du maillage des coins, les liaisons en C45 engendrent de grandes erreurs numériques.

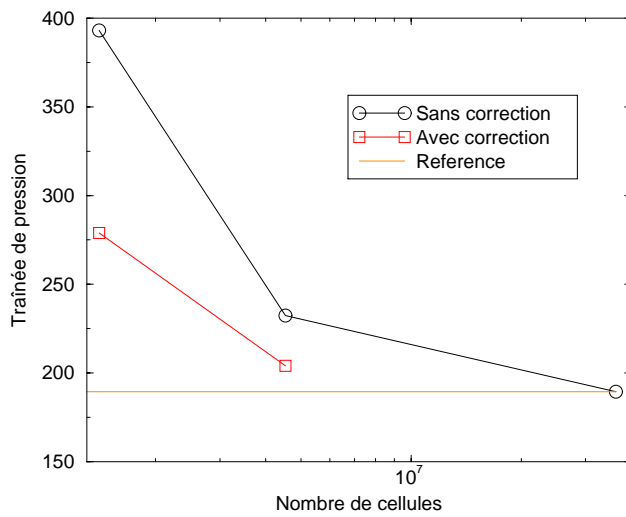


(a) Portance

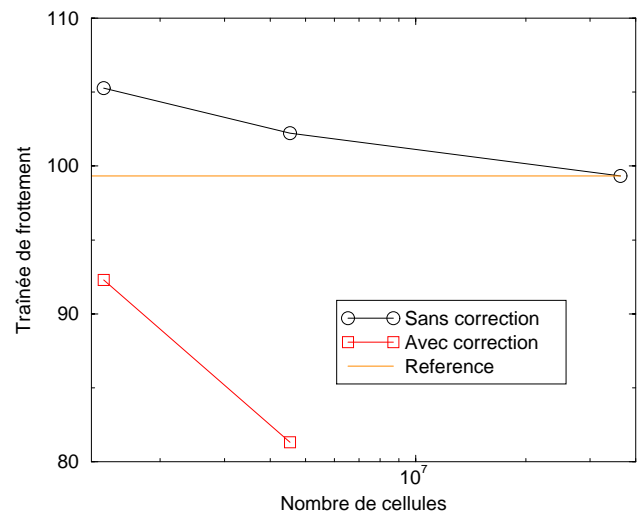


(b) Tangage

FIG. 3.35 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 2 maillages différents (AS28G NS)



(a) Trainée de pression champ proche (en point)



(b) Trainée de frottement (en point)

FIG. 3.36 – Correction des coefficients aérodynamiques avec 2 maillages différents (AS28G NS)

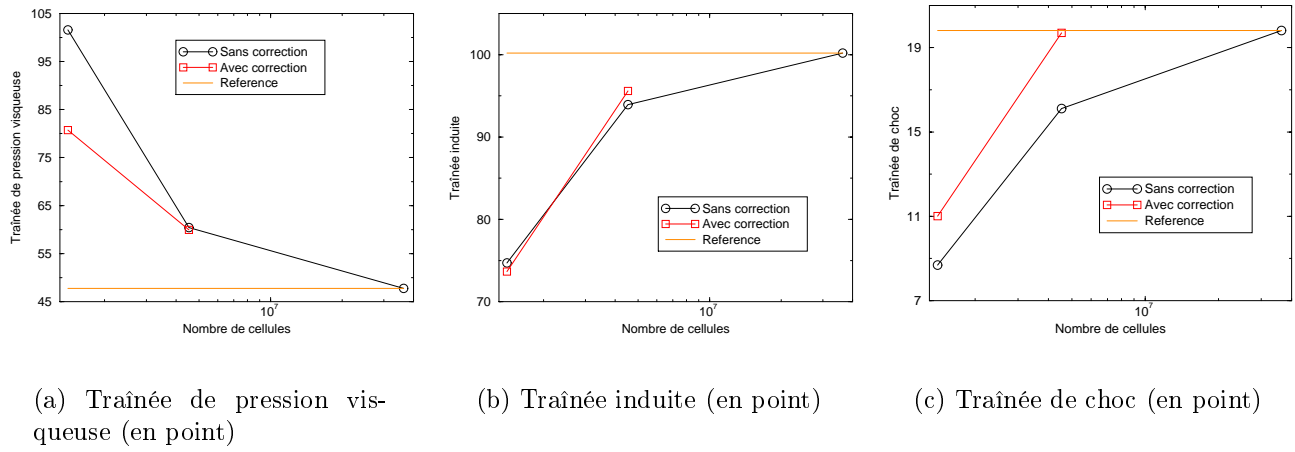
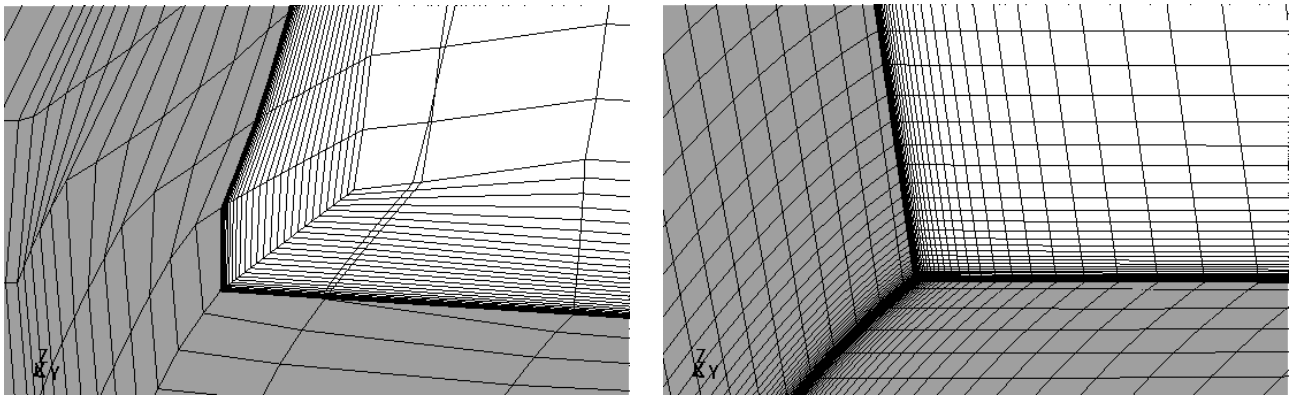


FIG. 3.37 – Correction des composantes de la traînée champ lointain avec 2 maillages différents (AS28G NS)



(a) Topologie dites en C45

(b) Topologie dites en C90

FIG. 3.38 – Deux topologies pour traiter les jonctions (ici une jonction aile/fuselage en gris)

	erreur sans correction	erreur avec correction	rapport des erreurs
Portance	4.64%	1.65 %	64.44%
Tangage	4.57%	1.61%	64.76%
Trainée NF	33.10%	10.35%	68.73%
Trainée de choc	10.66%	5.67%	46.78%
Trainée de pression visqueuse	52.45%	154.06%	-193.71%
Trainée induite	17.81%	91.54%	-413.89%

TAB. 3.11 – Correction adjointe en pourcentage de la grandeur considérée pour un cas avion complet

### 3.2.7 Ecoulement transsonique autour d'un avion complet de type Airbus

Dans cette partie, nous avons traité le cas d'un avion complet bimoteur de type Airbus. Ce cas est très proche au niveau de la configuration de l'AS28G, la différence vient de la nacelle qui est motorisée. On a une condition d'entrée fan et des conditions de sortie moteur et fan, ainsi qu'un plug. Tous les éléments (fuselage, aile, pylône, nacelle et plug) ont été traités avec une couche limite. Le maillage grossier possède 7 736 438 cellules et le maillage fin possède 59 010 712 cellules. Les liaisons entre l'aile et le fuselage ainsi que le mât et la voilure et le mât et la nacelle ont été maillées avec une jonction en C90 (voir figure 3.38(b) pour un exemple de jonction en C90) pour ne pas avoir les problèmes que l'on a eu précédemment.

Pour des raisons de confidentialité, nous avons présenté les résultats avec des pourcentages dans le tableau 3.11. La première colonne (erreur sans correction) est la valeur absolue du rapport entre la différence des solutions maillage fin et grossier sur la solution maillage fin,  $c_1 = \left| \frac{f_{grossier} - f_{fin}}{f_{fin}} \right|$ . La deuxième colonne (erreur avec correction) est la valeur absolue du rapport entre la différence des solutions maillage grossier avec correction adjointe et fin sur la solution maillage fin,  $c_2 = \left| \frac{f_{grossier+correction\ adjointe} - f_{fin}}{f_{fin}} \right|$ . La troisième colonne (rapport des erreurs) représente la proportion de correction adjointe par rapport à l'erreur initiale,  $r = \frac{c_1 - c_2}{c_1}$ . Si  $r$  est égal à 100%, alors la correction adjointe aura corrigé la totalité de l'erreur initiale.

Les résultats pour les valeurs champs proches sont assez bons. La trainée de choc est aussi bien corrigée. Au contraire, les traînées de pression visqueuse et induite sont très mal corrigées, pire, la correction accroît l'erreur que l'on avait au début. Encore une fois, nous sommes dans un cas du type du premier maillage de l'aile ONERA M6. Le maillage n'est pas adapté pour qu'il y ait une correction adjointe performante pour les composantes champ lointain. De plus pour des raisons de taille mémoire nous n'avons pas pu faire la correction sur le maillage utilisé normalement. Nous avons utilisé le maillage 1 point sur 2 ce qui a appauvri le nombre de points dans le volume engendrant une mauvaise correction adjointe.

Nous avons évalué le temps de calcul que nous avons mis dans le tableau 3.12 pour ce cas représentatif d'un avion de type Airbus étudié quotidiennement. Comme nous l'avons vu précédemment, le temps de calcul direct avec adjoint sur le maillage grossier reste inférieur à celui sur le maillage fin. La correction adjointe reste alors compétitive par rapport à un maillage deux fois plus raffiné.

Maillage	Temps partiel		Temps total
Grossier	Calcul direct	19240 sec	41532 sec
	Calcul adjoint	22292 sec	
Fin	Calcul direct	73437 sec	73437 sec

TAB. 3.12 – Etude des temps de calcul pour le calcul direct et la correction adjointe pour le cas avion complet

### 3.2.8 Bilan de la correction adjointe sur les écoulements visqueux

Notre analyse à travers des écoulements et des configurations de plus en plus complexe, en partant d'un cas subsonique en deux dimensions jusqu'à la modélisation d'un avion complet, nous a permis de voir les performances de la correction adjointe. Mais bien plus encore, cela nous a montré l'importance d'avoir un maillage adapté à l'écoulement que l'on cherche à modéliser. La correction et l'erreur adjointes sont des outils pour connaître la qualité du maillage par rapport à l'écoulement considéré. Ces indicateurs seront alors utilisés dans le prochain chapitre.

Pour la comparaison entre la correction adjointe et l'extrapolation de Richardson, nous pouvons remarquer deux choses. Tout d'abord, l'extrapolation ne s'applique pas à tous nos maillages car ils ne se trouvent pas dans la zone d'hypothèses requises. Ensuite la correction adjointe donne une information plus fiable que l'extrapolation de Richardson.

## 3.3 Conclusion sur la correction adjointe

Nous avons pu nous faire une idée des performances de la correction adjointe, à travers les différents exemples du fluide non-visqueux au visqueux, du profil en deux dimensions en passant par une aile isolée jusqu'à l'avion complet.

Les points positifs sont :

1. Bon passage de la correction adjointe du maillage non-structuré au **maillage structuré** : les coefficients aérodynamiques qui étaient bien corrigés dans la littérature par la correction adjointe le sont aussi bien dans notre cas.
2. Bonne adaptation de la correction adjointe pour les **coefficients de traînée champ lointain** : la nouvelle formulation adaptée pour la traînée champ lointain corrige bien les traînées de choc, induite et de pression visqueuse.
3. Bon **temps de calcul** : pour un maillage donné, le temps de calcul de la correction adjointe est plus court que pour le maillage isotropiquement raffiné pour un résultat presque équivalent.
4. Application de la correction adjointe à des **configurations industrielles**
5. **Nouvelles applications** : le fait d'utiliser l'équation 2.27 nous a ouvert de nouvelles applications quand à connaître le degré de convergence d'un calcul numérique ou encore estimer les coefficients sans avoir à converger le calcul complètement.

Les difficultés restantes sont :



1. Le **calcul du résidu** : pour l'instant il est fait grâce au code de calcul numérique elsA sur le maillage isotropiquement raffiné. Ce traitement est lourd car certaines actions qui ne devraient pas avoir lieu d'être pour juste le calcul du résidu sont quand même lancées comme pour un calcul normal (exemple : le calcul des distances).
2. La **taille du maillage fin** : il nous est pour l'instant matériellement impossible d'utiliser la correction adjointe sur tous les maillages. Si le maillage fait déjà 50 millions de points, il faudrait générer un maillage d'environ 400 millions de points ce qui est difficile d'un point de vue technique et matériel. La solution serait de générer le maillage fin morceau par morceau (bloc par bloc) avec à chaque fois un calcul local du résidu et son produit avec le vecteur adjoint.
3. Assurer **la qualité du maillage** : à travers les exemples précédents, il paraît évident qu'un bon calcul passe par un bon maillage et la correction adjointe rajoute des contraintes sur la qualité du maillage.

Les résultats sont très encourageants mais ils restent encore beaucoup de points à améliorer pour pouvoir appliquer cette méthode dans un contexte industriel dans son ensemble.

Pour l'extrapolation de Richardson, elle ne peut être appliquée que dans certaines conditions ce qui limite son utilisation, contrairement à la correction adjointe qui a un domaine d'application plus étendu. Cependant l'utilisation de l'extrapolation de Richardson a mis en évidence l'augmentation de l'ordre de discrétisation du schéma.

# Chapitre 4

## Enrichissement et adaptation de maillage

Ce chapitre sera décomposé en trois sections. Dans un premier temps divers senseurs vont être exposés. Le senseur qui semble fournir les informations les plus pertinentes sera sélectionné. Dans un second temps, ce senseur sera utilisé pour l'enrichissement de maillage par introduction de sous-blocs dans le maillage. Dans la dernière section de ce chapitre, ce senseur sera combiné à une technique de déplacement des noeuds du maillage. Un bilan de ces techniques d'adaptation de maillage sera donné en conclusion de ce chapitre.

### 4.1 Choix du senseur

#### 4.1.1 Introduction

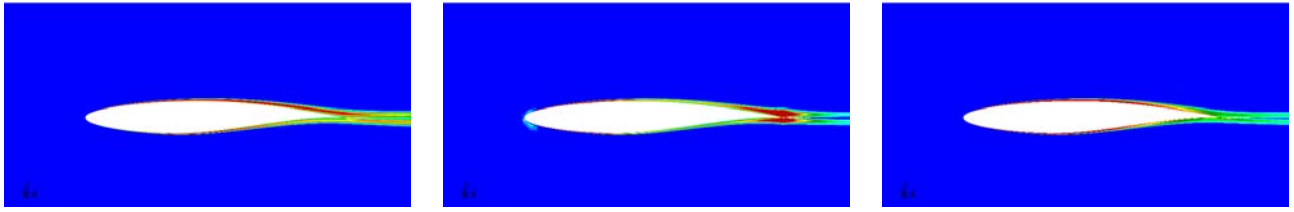
Pour l'instant à Airbus [64], trois différents senseurs sont utilisés : le taux d'accroissement, le gradient topologique et le gradient géométrique. Le calcul de l'accroissement local de la fonction considérée  $\phi$  se fait comme suit :  $\left| \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{\phi_i} \right|$ . Le gradient topologique se calculera comme un gradient suivant les coordonnées topologiques :  $\left| \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2} \right|$ . Le gradient géométrique se calculera comme le gradient suivant les coordonnées de l'espace réel :  $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|$ . Ces senseurs sont par définition anisotropes. Si l'on veut un senseur isotrope, la norme du vecteur obtenu est calculée.

Après avoir choisi un de ces senseurs, il faut ensuite choisir sur quelle grandeur (pression statique, pression totale, nombre de Mach, masse volumique, ...) il faut l'appliquer. Ce n'est pas un choix trivial. Pour nous aider dans ce choix, nous montrerons une large palette de senseur. Tous d'abord, les senseurs courants à Airbus seront exposés, puis les senseurs basés sur une approche adjointe. Les senseurs sélectionnés seront ensuite utilisés dans la section 4.2 pour l'enrichissement de maillage et dans la section 4.3 pour le déplacement des noeuds de maillage.

Pour la suite, nous devons définir la notion de "marquage" par un senseur. Le fait de marquer une zone dans le domaine de calcul revient à pointer une zone d'intérêt pour un raffinement ultérieur du maillage.

#### 4.1.2 Profil dans un écoulement subsonique visqueux

Le profil RAE2822 dans un écoulement avec un nombre de Reynolds de 6 300 000, un nombre de Mach de 0.6 et un angle d'attaque de  $2.05^\circ$  est le même que celui étudié dans la section 3.2.2.

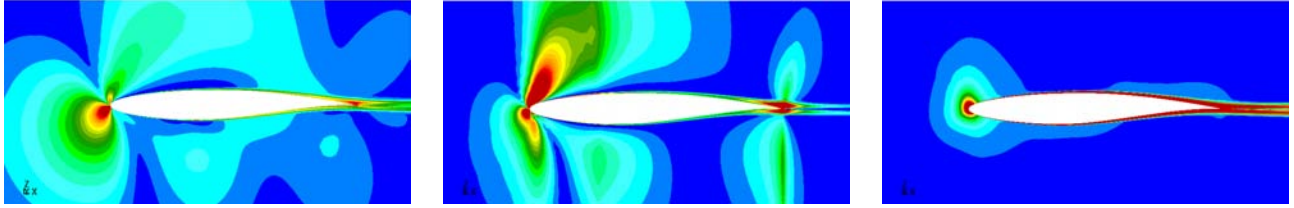


(a) Taux d'accroissement

(b) Gradient topologique

(c) Gradient géométrique

FIG. 4.1 – Senseur calculé à partir des gradients de la pression totale (RAE2822 NS subsonique)



(a) Taux d'accroissement

(b) Gradient topologique

(c) Gradient géométrique

FIG. 4.2 – Senseur calculé à partir des gradients du nombre de Mach (RAE2822 NS subsonique)

### Les différents senseurs usuels

Devant la multitude des variables, nous en avons sélectionné deux qui sont souvent utilisées pour trouver les zones à raffiner : la pression totale et le nombre de Mach. Les isobandes des gradients associés à ces deux quantités sont représentés sur les figures 4.1 et 4.2. Pour ce cas subsonique, nous pouvons nous attendre à un raffinement du bord d'attaque et du bord de fuite avec éventuellement un raffinement dans la couche limite. Commençons maintenant l'observation des zones sélectionnées par nos senseurs.

Pour ce qui est du taux d'accroissement, les zones détectées sont la couche limite pour le senseur de pression totale (fig. 4.1(a)) et le bord d'attaque et de fuite pour le senseur du nombre de Mach (fig. 4.2(a)). Nous pouvons noter que le point d'arrêt est très bien mis en évidence par ce dernier.

Pour le gradient topologique (fig. 4.1(b) et 4.2(b)), le bord de fuite est bien marqué pour nos deux quantités et le bord d'attaque est marqué par le senseur sur le nombre de Mach.

Pour finir, le gradient géométrique (fig. 4.1(c) et 4.2(c)) marque toute la couche limite pour nos deux quantités et le bord d'attaque pour ce qui est du nombre de Mach. Le point d'arrêt n'est plus mis en évidence.

À la lumière de ces observations, nous pouvons déjà éliminer la pression totale comme senseur car la couche limite que nous avons construite est de bonne qualité. Pour les mêmes raisons, le gradient géométrique du nombre de Mach est éliminé. Le taux d'accroissement du nombre de Mach semble être plus pertinent que le gradient topologique.

Nous voyons bien à travers cet exemple la complexité du choix du senseur par rapport à la quantité à considérer. De plus, nous ne sommes pas sûrs d'avoir le résultat escompté si l'on veut par exemple améliorer le calcul sur la portance. C'est pour cela qu'il faut introduire de nouveaux senseurs avec comme objectif l'amélioration du calcul des coefficients de portance ou de traînée.

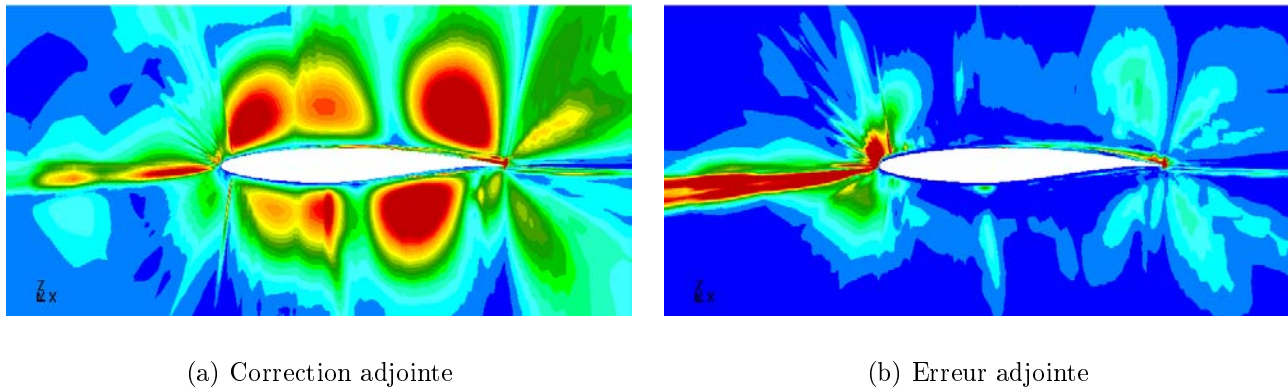


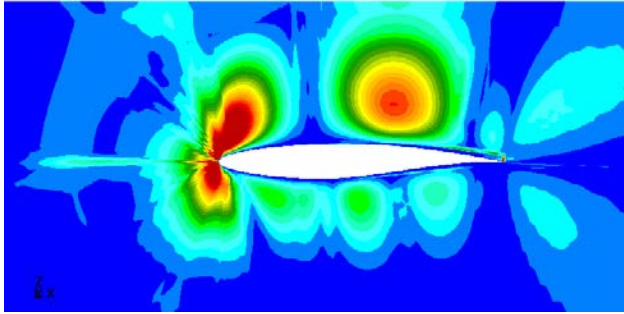
FIG. 4.3 – Capteur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la portance (RAE2822 NS subsonique)

### Les capteurs sur les coefficients aérodynamiques

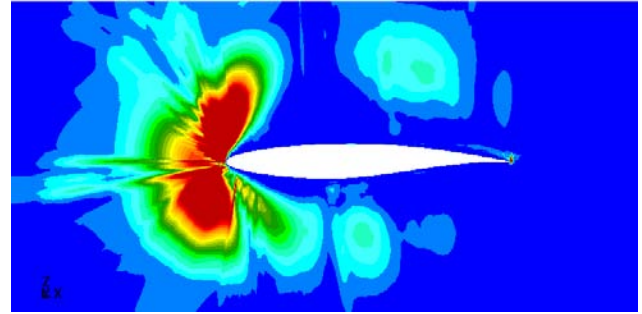
Dans ce paragraphe, nous allons voir quelles informations locales peut apporter l'utilisation de capteurs basés sur la correction adjointe ou l'erreur adjointe.

Sur la figure 4.3, la correction et l'erreur adjointes calculées par rapport à la portance montrent quelques similitudes. En effet, le point d'arrêt au bord d'attaque et le bord de fuite sont bien marqués. La grande différence vient du fait que pour la correction adjointe (fig. 4.3(a)) de grandes zones du maillage à l'intrados et à l'extrados sont assez importantes pour le raffinement. Alors que pour l'erreur adjointe (fig. 4.3(b)) ces zones ont disparu (c'est une zone de faible gradient pour le vecteur adjoint) et c'est surtout la survitesse entre le point d'arrêt et l'extrados qui est mise en évidence. L'erreur adjointe est plus conforme à ce que l'on pourrait attendre physiquement sur les zones à raffiner : la zone allant vers le point d'arrêt puis la survitesse et enfin le bord de fuite. Pour la zone proche paroi, seulement les six premières cellules sont marquées alors que pour les capteurs classiques c'est toute la couche limite qui l'est.

Sur la figure 4.4, la correction et l'erreur adjointes sont calculées par rapport à la traînée champ proche. Nous pouvons faire les mêmes remarques que celle du cas précédent pour la différence entre la correction et l'erreur adjointe. Intéressons nous aux zones marquées par l'erreur adjointe (fig. 4.4(b)). Toute la zone devant le bord d'attaque a été marquée contrairement au capteur sur la portance où juste la partie extrados avait été marquée. Cette zone est particulièrement riche en création de traînée parasite numérique si l'on se réfère à l'analyse du calcul de la traînée champ lointain. Il n'est donc pas étonnant de voir cette zone mise en évidence. Le bord de fuite doit aussi être raffiné. Que se passe-t-il lorsque l'on ne tient plus compte de la traînée parasite ? Pour répondre à cette question, la correction et l'erreur adjointe ont été calculées par rapport à la composante de traînée de pression visqueuse (fig. 4.5). La correction adjointe (fig. 4.5(a)) marque surtout l'arrière du profil et on retrouve la présence de zones dans le volume à l'intrados et l'extrados. Au contraire, sur l'erreur adjointe (fig. 4.5(b)) le bord de fuite est marqué ainsi que deux zones à l'intrados et l'extrados entourant la couche limite et le sillage. En regardant le maillage, il semblerait que dans ces zones particulières le maillage comporte un accroissement des tailles de mailles assez conséquent par rapport au phénomène physique. Il faut aussi remarquer que la zone au bord d'attaque que l'on avait pour la traînée de pression champ proche est beaucoup moins importante dans ce cas là. Pour finir, le point d'arrêt est encore une fois mis en évidence.

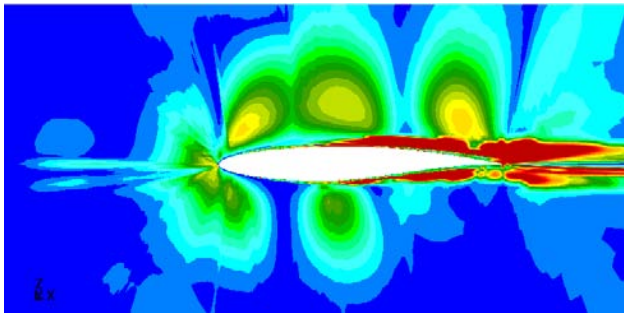


(a) Correction adjointe

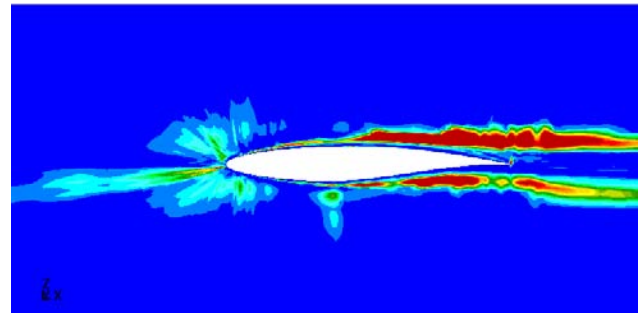


(b) Erreur adjointe

FIG. 4.4 – Senseur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la traînée de pression champ proche (RAE2822 NS subsonique)



(a) Correction adjointe



(b) Erreur adjointe

FIG. 4.5 – Senseur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la traînée de pression visqueuse (RAE2822 NS subsonique)

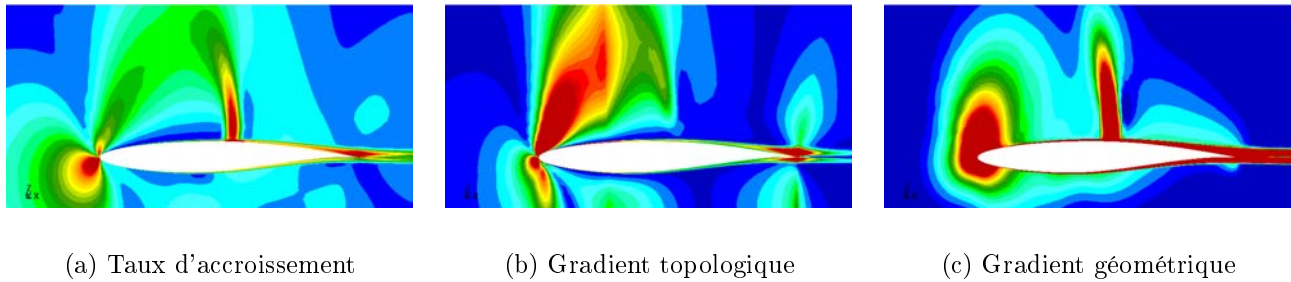


FIG. 4.6 – Capteur calculé à partir des gradients du nombre de Mach (RAE2822 NS transsonique)

### Bilan sur les capteurs étudiés

Au niveau des capteurs usuels, le capteur basé sur le taux d'accroissement du nombre de Mach est celui qui fournit les informations les plus pertinentes. Cependant, les résultats obtenus avec l'erreur adjointe calculée par rapport à la traînée de pression sont aussi très pertinents. De plus l'avantage de ce dernier est d'être relié à un coefficient aérodynamique. Si le maillage est amélioré dans les zones indiquées, nous savons quelle quantité nous améliorons.

### 4.1.3 Profil dans un écoulement transsonique visqueux

Après avoir vu un cas avec un profil subsonique, nous allons nous intéresser à un cas transsonique (profil RAE2822  $Re=6\,500\,000$ ,  $M=0.725$  et  $\alpha=2.70^\circ$  voir section, 3.2.4) où le gradient du nombre de Mach est un capteur amplement et habituellement utilisé.

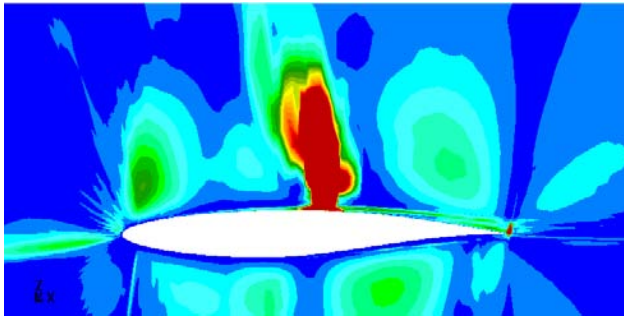
#### Les différents capteurs usuels

Quand on regarde les différents capteurs (fig. 4.6), les zones que l'on a remarquées pour l'écoulement subsonique sont présentes avec en plus le marquage du choc excepté pour le gradient topologique. Encore une fois le taux d'accroissement du nombre de Mach (fig. 4.6(a)) semble être le capteur qui marque le mieux les zones intéressantes qui sont le bord d'attaque, le bord de fuite et le choc. Un accent est mis encore une fois sur le point d'arrêt. Malgré tout, nous ne pouvons pas anticiper ce que va nous apporter le raffinement des zones précitées.

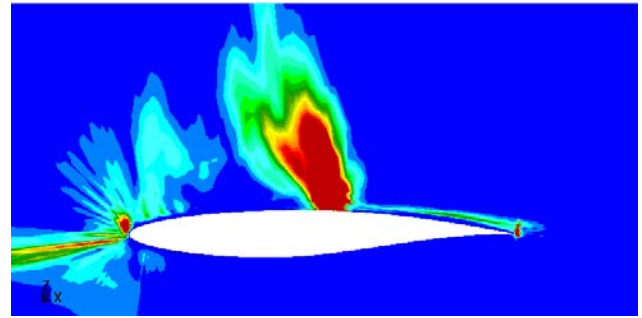
#### Les capteurs sur les coefficients aérodynamiques

Pour le premier cas étudié, le vecteur adjoint sera calculé par rapport à la portance. Sur la figure 4.7, la correction et l'erreur montre des profils assez similaires mais on retrouve les différences que l'on avait dans le cas précédent avec la présence de ces grandes zones dans le volume. D'après l'erreur adjointe (fig. 4.7(b)) les zones à raffiner se situent alors au niveau du choc, du bord de fuite, du point d'arrêt et de la zone de survitesse de l'extrados. On retrouve la même tendance que le cas précédent si l'on compare l'adjoint de la portance avec celui de la traînée de pression champ proche (fig. 4.8(b)), c'est à dire que l'ensemble du bord d'attaque est marqué, zone de production de la traînée parasite.

Pour les composantes champs lointains de la traînée, si l'on considère pour commencer la traînée de choc (fig. 4.9), la zone au bord d'attaque n'est plus présente et le raffinement se focalise surtout sur le choc. Cette observation est assez en accord avec ce que l'on aurait pu espérer de ce capteur. Pour ce qui est de la traînée de pression visqueuse (fig. 4.10(b)), nous

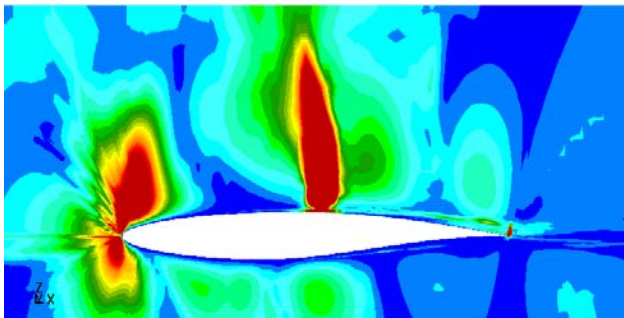


(a) Correction adjointe

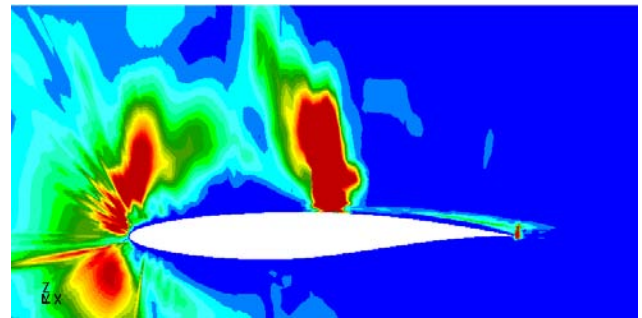


(b) Erreur adjointe

FIG. 4.7 – Senseur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la portance (RAE2822 NS transsonique)

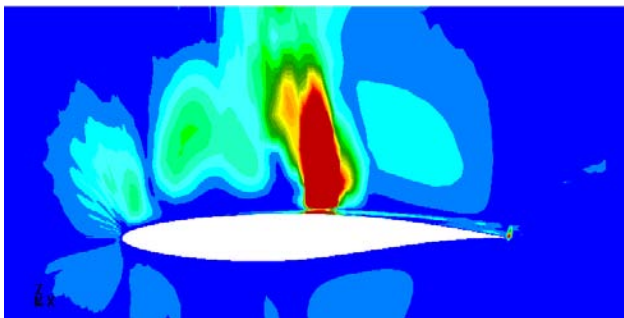


(a) Correction adjointe

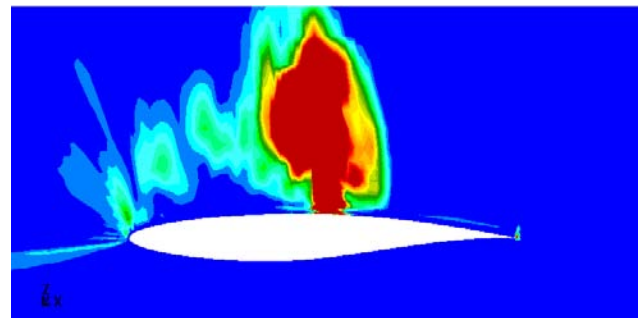


(b) Erreur adjointe

FIG. 4.8 – Senseur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la traînée de pression champ proche (RAE2822 NS transsonique)



(a) Correction adjointe



(b) Erreur adjointe

FIG. 4.9 – Senseur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la traînée de choc (RAE2822 NS transsonique)



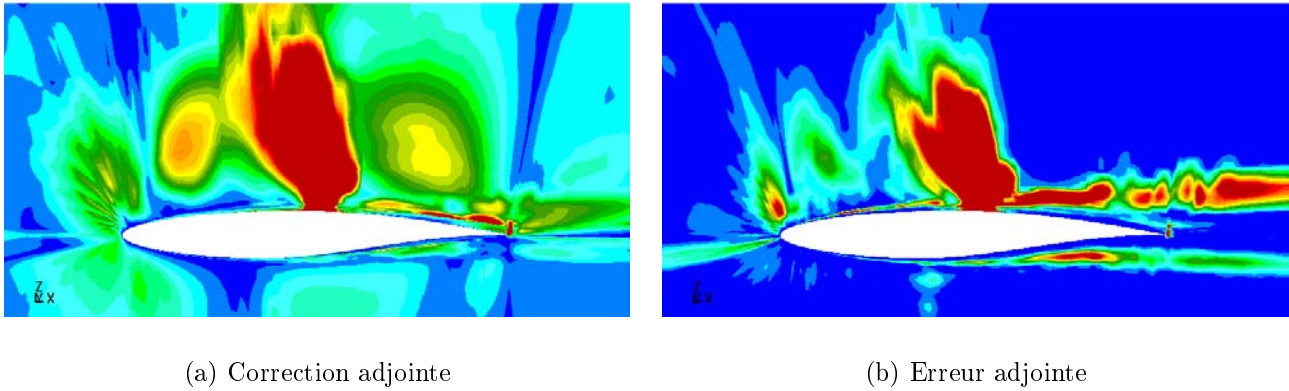


FIG. 4.10 – Capteur calculé à partir de la correction adjointe basée sur la traînée de pression visqueuse (RAE2822 NS transsonique)

retrouvons les zones de maillage détectées avec le maillage précédent ainsi que le choc qui semble être important. Nous pouvons supposer que l'importance du choc vient du fait que sa bonne définition induira le bon épaissement de la couche limite au travers du choc d'où une bonne estimation de la traînée de pression visqueuse.

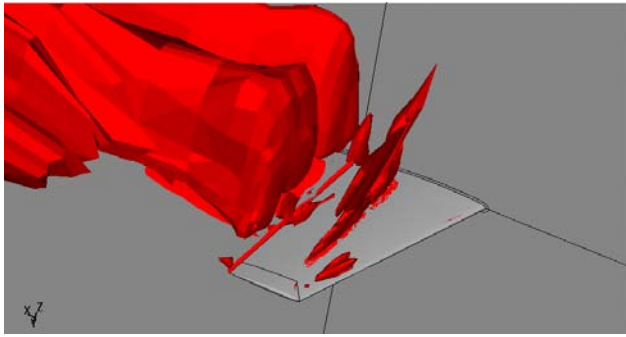
### Bilan sur les capteurs étudiés

Cet exemple souligne la pertinence des informations fournies par les capteurs basé sur l'opérateur adjoint par rapport aux capteurs usuels. De plus, la décomposition de la traînée par une approche champs lointain montre avec une grande précision les zones critiques pour chacune des composantes de traînée. Le capteur calculé à partir de l'erreur adjointe de la traînée de pression champ proche est un capteur qui rassemble toute les zones d'intérêt des composantes de traînée.

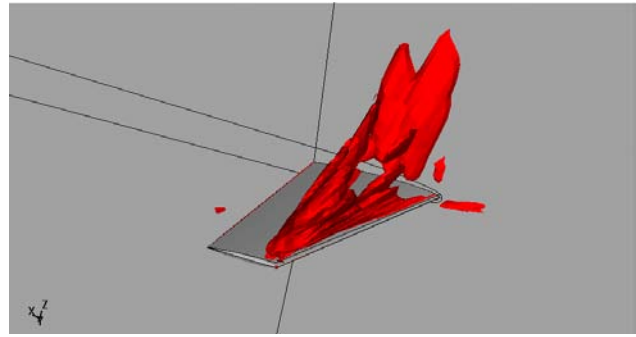
#### 4.1.4 Aile dans un écoulement transsonique visqueux

Nous allons voir maintenant les capteurs sur un cas en trois dimensions (Aile ONERA M6  $Re=11\,720\,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$ ). L'exemple de l'aile ONERA M6 dans un fluide visqueux que l'on a vu précédemment dans la thèse (voir section 3.2.5), va être étudié ici. Nous avons vu qu'avec un premier maillage (dit maillage 1) les résultats sur la traînée de pression visqueuse et induite n'étaient pas d'une grande qualité. De ce fait, nous avons construit un autre maillage (dit maillage 2). Ceci a amélioré les corrections adjointes sur les coefficients considérés. Cette étude a pu être effectuée car nous disposons de deux maillages de qualités différentes ce qui n'est pas souvent le cas dans l'industrie. Pour anticiper les erreurs ou les faibles performances de la correction adjointe dues à la qualité du maillage, l'erreur adjointe peut être d'une grande aide. En effet, l'erreur adjointe calculée par rapport à la traînée de pression visqueuse est représentée sur la figure 4.11 pour le maillage 1 (fig. 4.11(a)) et pour le maillage 2 (fig. 4.11(b)). Sur le maillage 1, une large partie du sillage est sélectionnée pour raffinement. La comparaison de la zone à raffiner par rapport au cas en deux dimensions traité précédemment, montre une plus grande zone du maillage à raffiner au-dessus du sillage. Cela montre bien la qualité médiocre de ce maillage pour représenter le sillage de cette aile. Au contraire pour le deuxième maillage, la zone sélectionnée est autour du choc car ce dernier influence l'épaisseur de la couche limite.



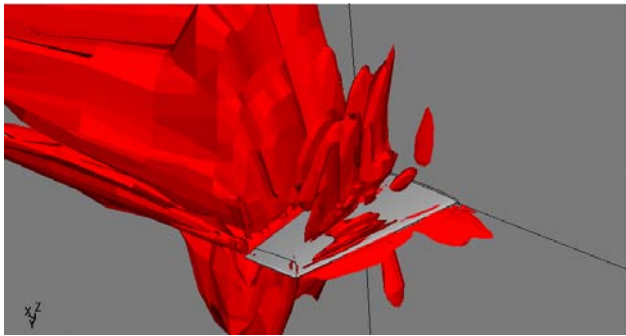


(a) Maillage 1

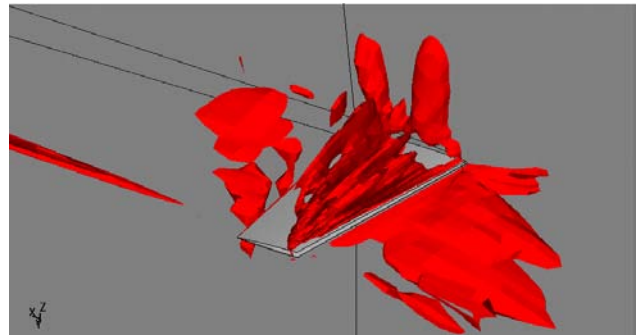


(b) Maillage 2

FIG. 4.11 – Iso-surface du sensur calculé à partir de l'erreur adjointe basée sur la traînée de pression visqueuse (Aile ONERA M6 NS)



(a) Maillage 1



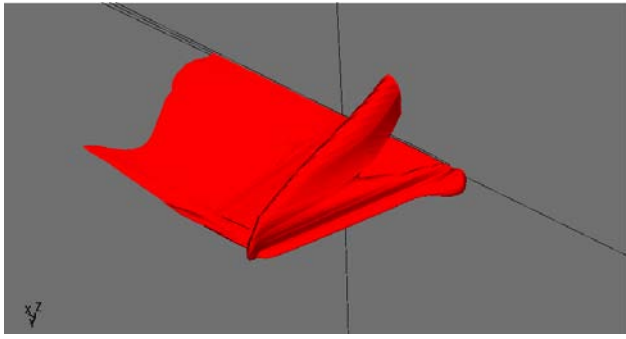
(b) Maillage 2

FIG. 4.12 – Iso-surface du sensur calculé à partir de l'erreur adjointe basée sur la traînée induite (Aile ONERA M6 NS)

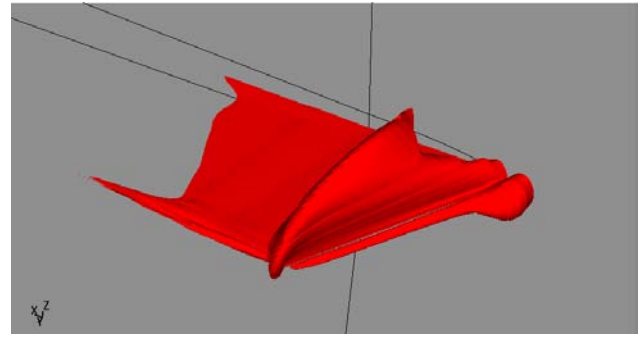
Le travail que nous avons fourni pour bien représenter le sillage est ici mis en évidence car les cellules dans le sillage ne sont pas sélectionnées pour être raffinées.

Sur la figure 4.12, l'erreur adjointe pour la traînée induite a été représentée. Comme pour la traînée de pression visqueuse sur le maillage 1 (fig. 4.12(a)), le sillage ainsi que le tourbillon de bout d'aile semblent générer de grands problèmes de définition de la solution. Au contraire sur le maillage 2 (fig. 4.12(b)), la partie amont du maillage ainsi que le choc semble être plus problématique. L'erreur adjointe calculée par rapport à la portance a la même topologie que celle calculée avec la traînée induite sur le maillage 2. La traînée induite et la portance étant des grandeurs assez liées entre elles, il semble normal que l'on trouve des zones assez semblables à raffiner. Cette propriété ne se retrouve pas sur le maillage 1, cela peut donc être une indication de la qualité du maillage.

Sur la figure 4.13, le taux d'accroissement du nombre de Mach a été représenté pour les 2 maillages. Malgré la différence des résultats obtenus sur chaque maillage, ce sensur montre des zones à raffiner assez similaires qui se composent du choc, de la couche limite et d'une partie du sillage. Ce sensur ne fait aucune distinction entre différents maillages de différentes qualités.



(a) Maillage 1



(b) Maillage 2

FIG. 4.13 – Iso-surface du senseur calculé à partir du taux d'accroissement du nombre de Mach (Aile ONERA M6 NS)

### Bilan sur les senseurs étudiés

Ce cas est assez pertinent car il nous donne l'occasion de comparer deux maillages de qualités différentes. Les senseurs usuels exposés ici ne fournissent pas d'information sur la qualité du maillage. Ceci est différent pour les senseurs calculés avec l'erreur basée sur l'opérateur adjoint. La différence est claire entre les maillages 1 et 2. Pour le maillage 1, les zones marquées ne sont pas des domaines où des phénomènes physiques marquant apparaissent comme par exemple le choc et le sillage. Pour le maillage 2, les zones marquées sont des domaines plus physiques. Nous pouvons en conclure que les maillages de faible qualité auront des zones marquées par l'erreur adjointe concentrées en dehors des domaines d'activité physique marquante. Cette erreur peut-être décrite comme une erreur intrinsèque au maillage purement numérique. Dans le cas contraire l'erreur sera une erreur due au phénomène physique qui ne sera pas assez détaillé par le maillage.

## 4.2 Enrichissement de Maillage (AMR)

### 4.2.1 Introduction

La section précédente nous a permis de voir que l'erreur adjointe est très performante pour sélectionner les zones du maillage à raffiner. Dans cette section, ces résultats vont être utilisés pour introduire dans le maillage des sous-blocs. L'influence de l'introduction de ces sous-blocs sera étudiée sur des coefficients aérodynamiques globaux comme la portance ou la traînée mais aussi sur un coefficient aérodynamique local, le coefficient de pression. Les cas étudiés par la suite seront un profil en fluide non-visqueux, un profil en fluide visqueux et une aile en fluide visqueux.

### 4.2.2 Profil dans un écoulement subsonique non-visqueux

Le profil RAE2822 sera traité à un nombre de Mach de 0.6 et un angle d'incidence de  $2.5^\circ$ . Pour ce cas, nous avons repris les maillages utilisés pour la correction des coefficients aérodynamiques. Le senseur utilisé est le senseur adjoint que l'on a calculé par rapport à la portance. Les sous-blocs sont déterminés par rapport à ce senseur avec la méthode de Berger

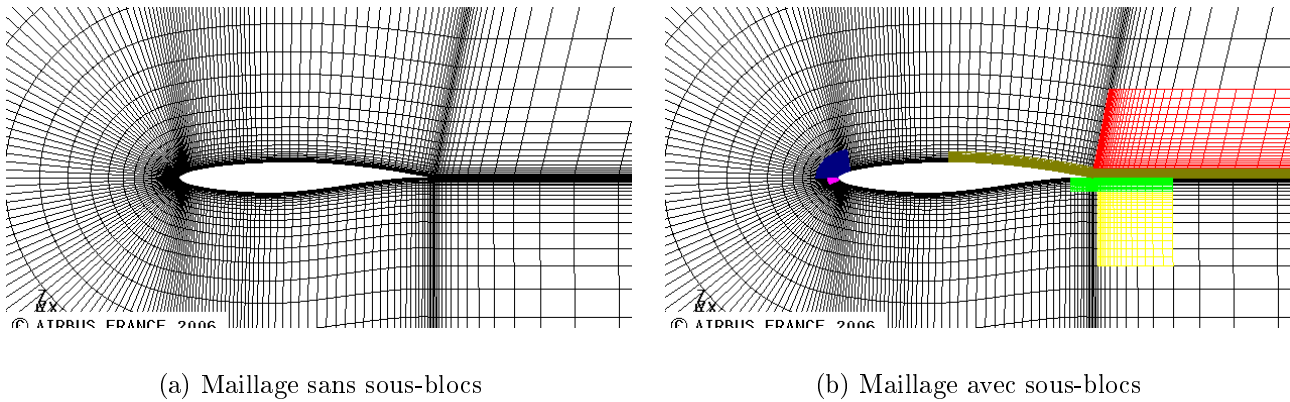


FIG. 4.14 – Maillage avec et sans sous-blocs (RAE2822 Euler subsonique)

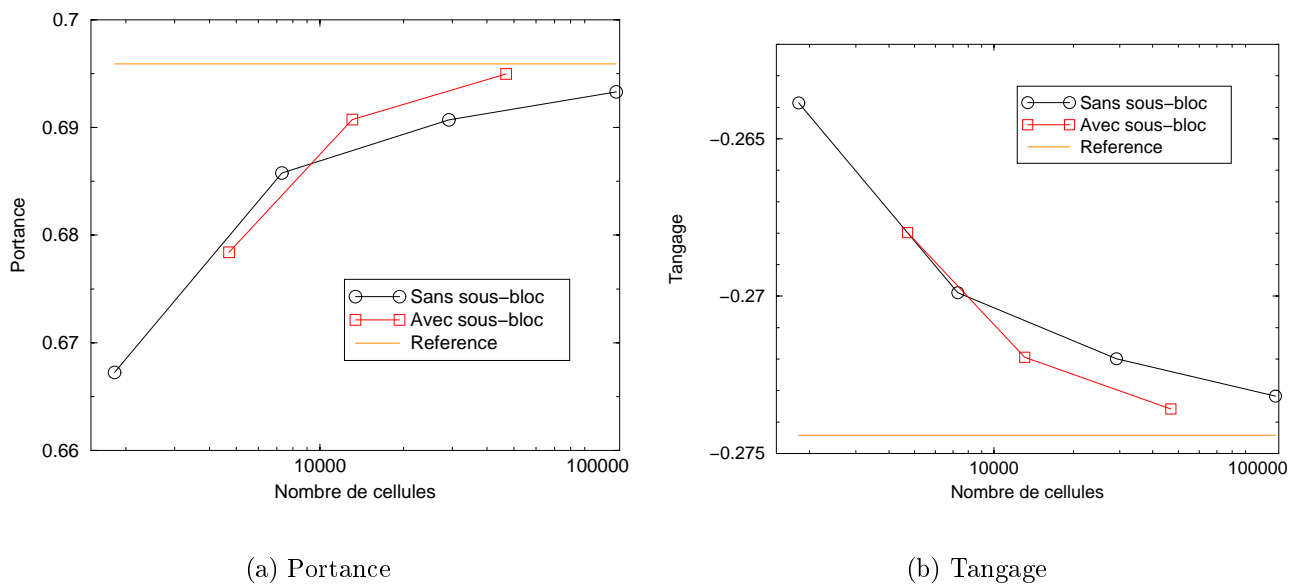


FIG. 4.15 – Evolution des coefficients de portance et du moment tangage avec ajout d'un niveau de sous-bloc (RAE2822 Euler subsonique)

et Rigoutsos [14]. On fait une reprise de calcul à partir de la base ainsi modifiée avec un niveau de sous-blocs. Il n'est pas possible de calculer un autre niveau de sous-blocs à partir de notre base modifiée car les développements nécessaires au calcul du vecteur adjoint avec une base contenant des sous-blocs n'ont pas encore été effectués.

Sur la figure 4.14, deux exemples de maillage avec et sans sous-blocs sont montrés. Les zones importantes raffinées sont le bord d'attaque et le bord de fuite. On retrouve le même comportement sur les autres maillages.

Les résultats de cette étude sont sur la figure 4.15 pour les coefficients de portance et du moment de tangage. Les bases enrichies avec les sous-blocs donnent des résultats très proches du maillage raffiné isotropiquement avec moins de cellules. Dans ce cas là, l'enrichissement de maillage montre toute son efficacité.

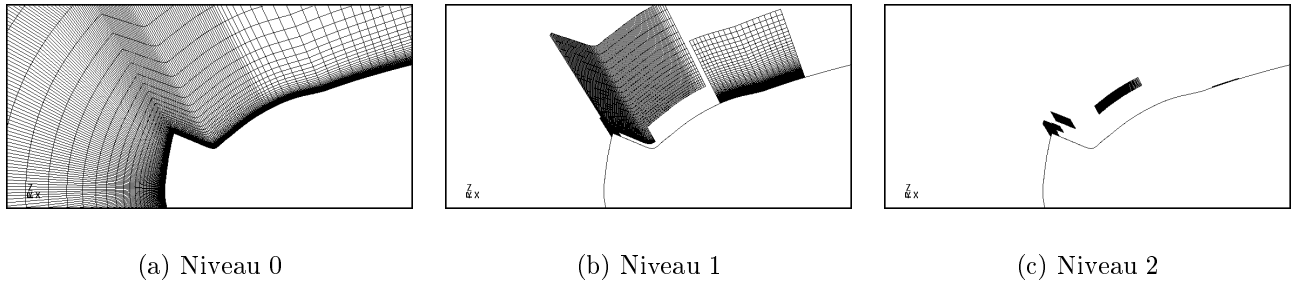


FIG. 4.16 – Différents niveaux de maillage pour l'adaptation du profil d'aile avec forme de givre

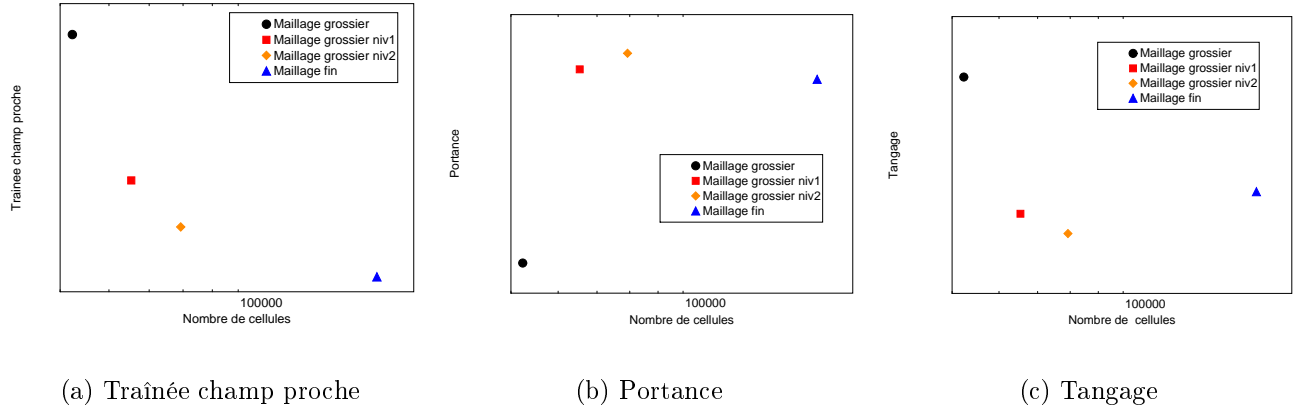


FIG. 4.17 – Coefficients aérodynamiques pour le profil d'aile avec forme de givre

### 4.2.3 Profil avec forme de givre dans un écoulement subsonique visqueux

Le profil d'aile avec forme de givre de la section 3.2.3 est étudié pour cette étude ( $Re=454\,400$ ,  $M=0.2$  et  $\alpha=0.0^\circ$ ). Le senseur adjoint utilisé pour cette étude est celui basé sur la traînée issue d'une approche champs proche. Un seul maillage a été adapté avec l'introduction de deux niveaux de sous-blocs. Le premier niveau de sous-blocs a été introduit à l'aide du senseur adjoint et le deuxième avec un senseur basé sur le taux d'accroissement du nombre de Mach. Nous avons effectué un agrandissement du bord d'attaque avec la forme de givre sur la figure 4.16. Le niveau 0 (fig. 4.16(a)) représente le maillage sans sous-blocs, le niveau 1 (fig. 4.16(b)) celui avec un niveau de sous-blocs et le niveau 2 (fig. 4.16(c)) celui avec deux niveaux de sous-blocs. Le raffinement se concentre autour de la recirculation. Le senseur indique qu'une attention particulière doit être apportée pour le maillage du pic de la forme de givre. Deux niveaux de sous-blocs se trouvent à cet endroit.

L'influence de ces raffinements sur les coefficients de traînée issue d'une approche champ proche, de tangage et de portance est montré sur la figure 4.17. Le maillage grossier avec deux niveaux de sous-blocs obtient des résultats très proches du maillage isotropiquement raffiné. La recirculation du bord d'attaque est de mieux en mieux définie par l'introduction des sous-blocs. Cela souligne son rôle majeur sur la précision des calculs des coefficients aérodynamiques.

	Sous-bloc	Coefficients de trainée de pression en points
Maillage 1	sans	158.0
	avec	139.0
Maillage 2	sans	130.1
	avec	123.3
Maillage fin	sans	116.0

TAB. 4.1 – Coefficient de trainée de pression champ proche pour les maillages 1 et 2, avec et sans sous-blocs pour l’aile ONERA M6 ( $Re=11\,720\,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$ )

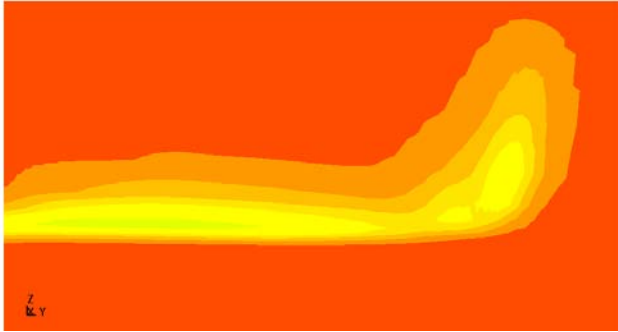
#### 4.2.4 Aile dans un écoulement transsonique visqueux

Pour cette adaptation de maillage, nous avons utilisé les deux maillages d’aile ONERA M6 générés pour la partie 3.2.5 ( $Re=11\,720\,000$ ,  $M=0.8395$  et  $\alpha=3.06^\circ$ ). Nous avons sélectionné le maillage à 360 000 cellules pour le maillage 1 et celui à 600 000 cellules pour le maillage 2. La fonction objectif est la trainée de pression champ proche. Les coefficients de trainée relatif sont donnés dans le tableau 4.1. Le fait d’introduire des sous-blocs améliore l’estimation de la trainée de pression champ proche ce qui est conforme à nos attentes.

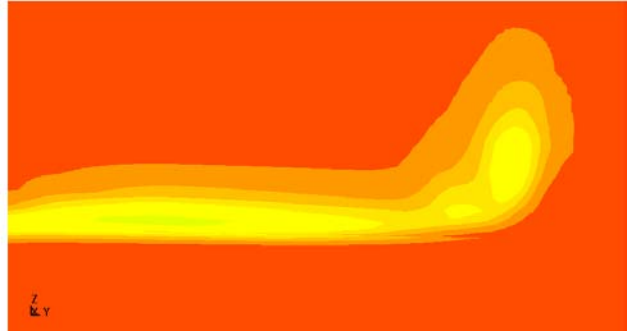
Sur la figure 4.18, nous avons tracé sur un plan de coupe en aval de l’aile les iso-bandes de la pression totale pour voir les changements qu’engendrent l’introduction des sous-blocs dans l’écoulement. La différence de résolution entre les maillages 1 et 2 est flagrante. Le maillage 2 définit bien le tourbillon de bout d’aile alors que sur le maillage 1, le tourbillon de bout d’aile est complètement diffusé par le maillage. A un maillage donné en comparant les niveaux 0 (sans sous-blocs) et 1 (avec sous-blocs), nous observons une amélioration nette de la définition de l’écoulement. Sur le maillage 1, le sillage est plus fin et le tourbillon de bout d’aile se diffuse moins alors que sur le maillage 2, le centre du tourbillon de bout d’aile est mieux défini.

Sur la figure 4.19, les maillages ont été rajoutés aux images de la figure 4.18 pour voir où les sous-blocs se rajoutent. Sur le maillage 1, des nouveaux sous-blocs apparaissent dans tout le sillage sauf dans les blocs qui continue la couche limite. Cette répartition est bien conforme à ce que l’on avait observé sur le senseur dans la partie précédente. Sur le maillage 2, un sous-bloc est rajouté autour du tourbillon de bout d’aile. Malgré toutes les précautions prises pour bien capter le sillage, nous observons qu’une partie du sillage est en dehors du raffinement du maillage de sillage. Le senseur l’a détecté et un sous-bloc a été rajouté précisément autour de la zone moins bien captée. Cet exemple sur le maillage 2 est une preuve de la précision et de la pertinence des informations fournies par l’erreur adjointe.

Pour finir, différentes distributions de coefficient de pression sont analysées. Sur la figure 4.20, nous avons placé les différentes lignes de coupe qui vont nous servir à représenter les distributions de coefficient de pression le long de l’aile. La figure 4.21 montre sur le maillage 1 les distributions de coefficient de pression en fonction de  $y\%$  la position le long de l’envergure. Trois courbes sont représentées dans chaque cadre : la solution sans sous-blocs, la solution avec sous-blocs et la solution sur notre maillage le plus fin. La solution sur le maillage sans sous-blocs est assez loin de la solution du maillage fin. Cela est particulièrement visible sur la coupe à 80



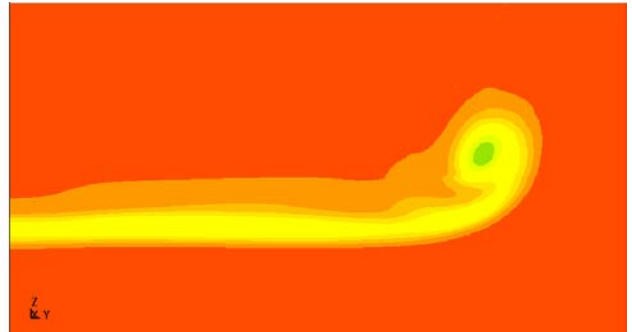
(a) Niveau 0 (Maillage 1)



(b) Niveau 1 (Maillage 1)

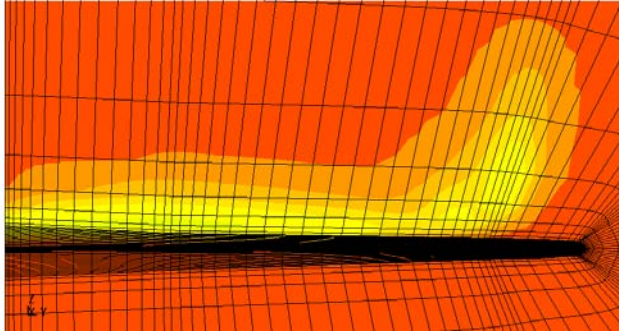


(c) Niveau 0 (Maillage 2)

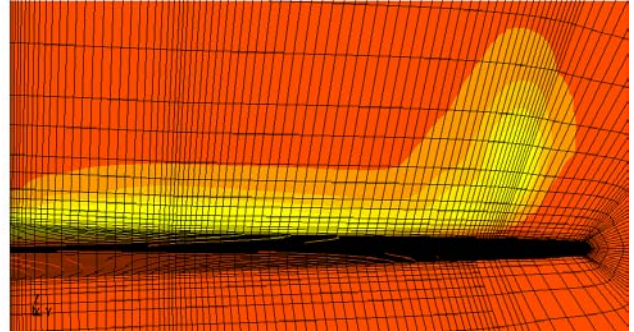


(d) Niveau 1 (Maillage 2)

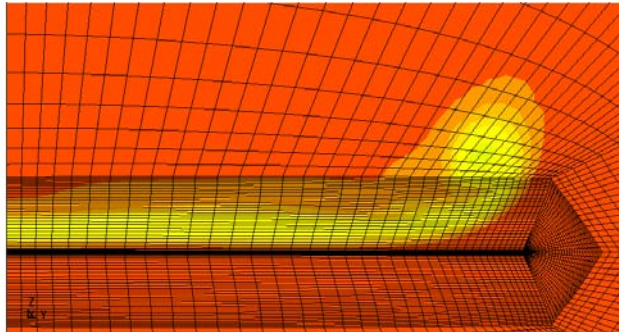
FIG. 4.18 – Iso-bande de la Pression totale sur un plan de coupe perpendiculaire au plan de symétrie en aval de l'écoulement



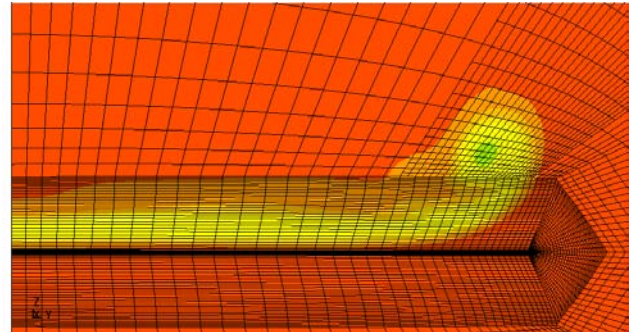
(a) Niveau 0 (Maillage 1)



(b) Niveau 1 (Maillage 1)



(c) Niveau 0 (Maillage 2)



(d) Niveau 1 (Maillage 2)

FIG. 4.19 – Iso-bande de la Pression totale sur un plan de coupe perpendiculaire au plan de symétrie en aval de l'écoulement + maillage

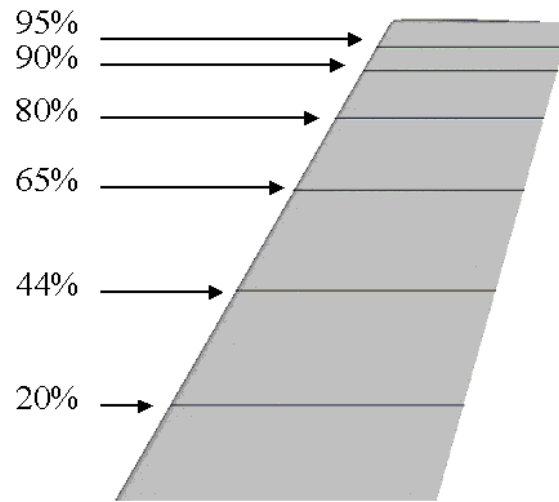


FIG. 4.20 – Localisation sur l’aile ONERA M6 des différentes lignes de coupe

% de l’envergure, car les chocs sont très mal positionnés par le calcul numérique. L’introduction des sous-blocs améliore grandement les résultats et la solution tend vers la solution du maillage fin.

Sur la figure 4.22, la même démarche a été appliquée pour le maillage 2. Par rapport au maillage 1, la solution sans sous-blocs est déjà plus proche de la solution du maillage fin. Il persiste quand même quelques problèmes de placement des chocs. En rajoutant des sous-blocs, la solution correspond presque à celle fournie sur un maillage fin et les chocs sont au bon endroit. Ceci prouve qu’avec moins de points de maillage mieux distribués et en raffinant judicieusement on peut tendre vers la solution du maillage fin.

A la lumière de ces résultats, nous pouvons conclure que le senseur basé sur l’erreur adjointe a pu être assez performant pour d’une part trouver les zones à raffiner dans le volume du maillage et d’autre part sur la surface de l’aile.

#### 4.2.5 Bilan sur l’utilisation de l’AMR

Nous avons étudié les cas d’un profil d’aile dans un écoulement non-visqueux, d’un profil d’aile avec forme de givre et d’une aile dans un écoulement visqueux. A travers ces exemples, nous avons pu évaluer la pertinence du senseur basé sur l’erreur adjointe pour la sélection des zones du domaine de calcul dans le but d’améliorer le maillage. L’utilisation de ces informations pour l’introduction des sous-blocs, nous a donné des résultats de calcul d’une qualité égale aux maillages raffinés isotropiquement. La précision du calcul du coefficient aérodynamique donné est augmentée et la solution volumique est mieux discrétisée. Ce processus est complètement satisfaisant.



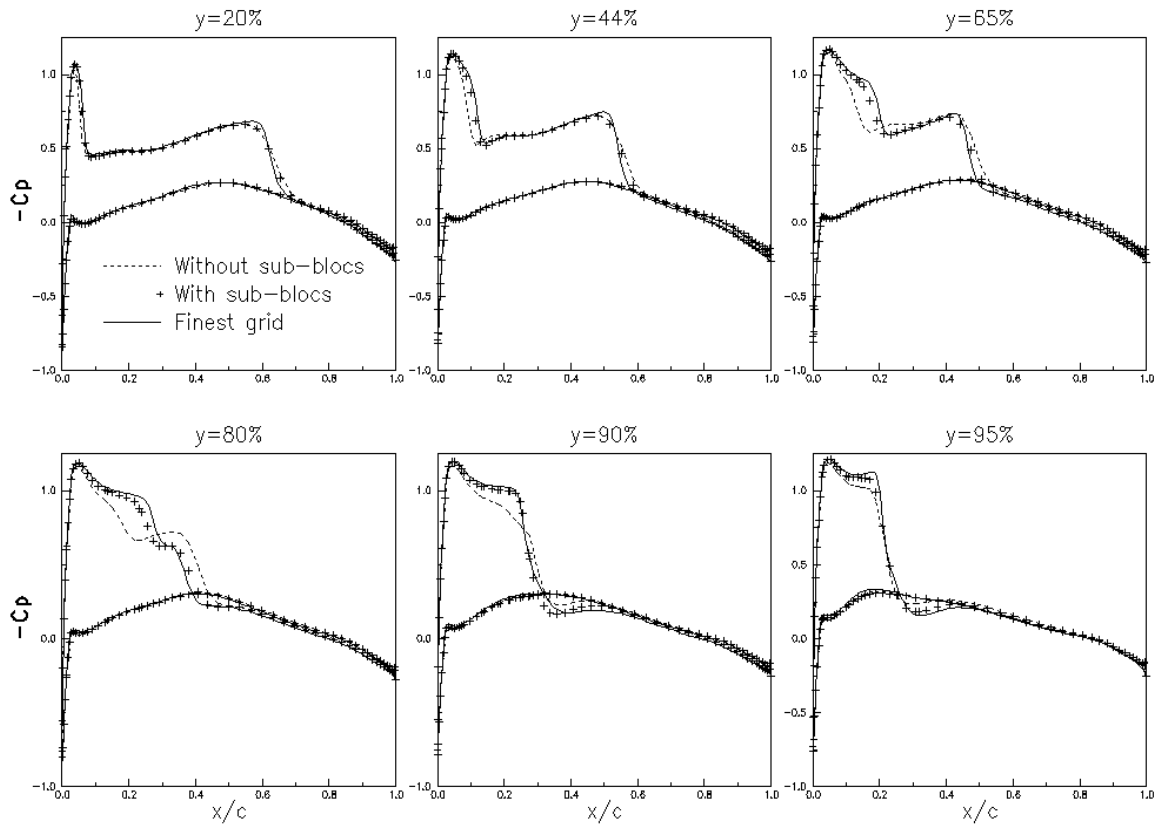


FIG. 4.21 –  $-C_p$  sur l'intrados et l'extrados de l'aile ONERA M6 pour le maillage 1 ( $Re=11,720,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$ )

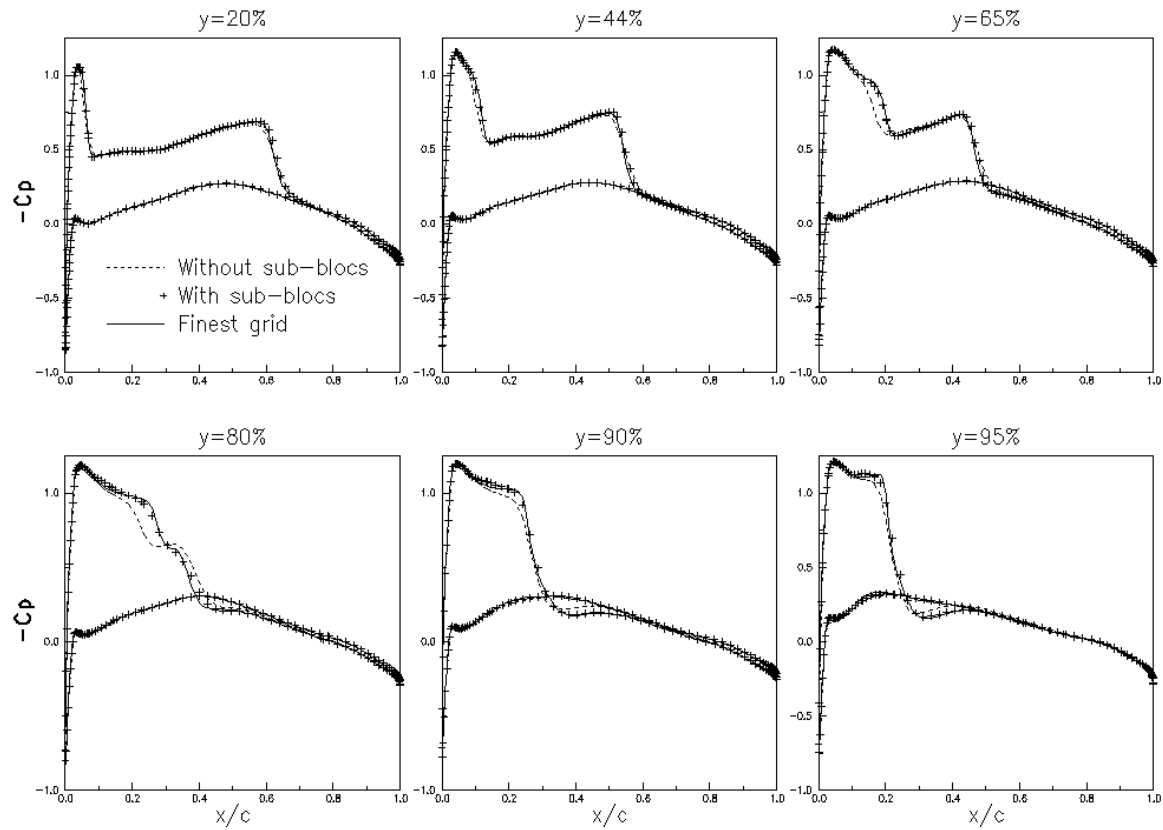


FIG. 4.22 –  $-C_p$  sur l'intrados et l'extrados de l'aile ONERA M6 pour le maillage 2 ( $Re=11,720,000$   $M=0.8395$   $\alpha=3.06^\circ$ )

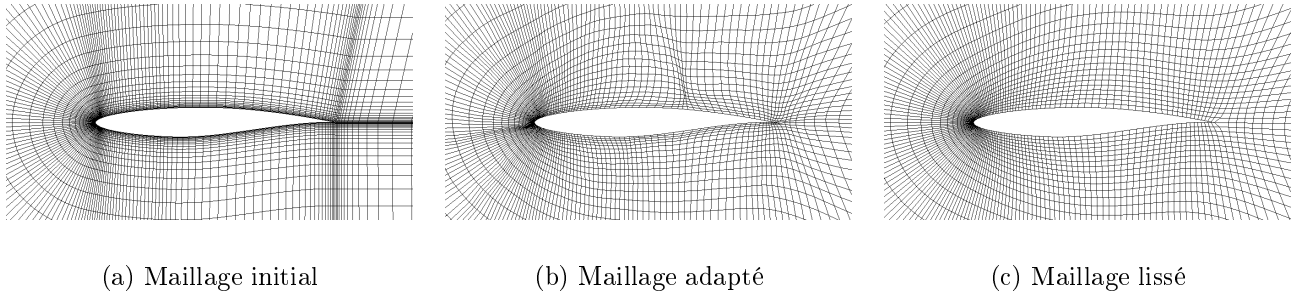


FIG. 4.23 – Adaptation des maillages par la méthode elliptique (RAE2822 Euler transsonique)

## 4.3 Déplacement de Noeuds

### 4.3.1 Introduction

Une autre stratégie pour améliorer la qualité du maillage est de garder le même nombre de noeuds de maillage en les répartissant mieux dans l'espace. La théorie a été expliquée dans la section 2.5.3. Pour résumer, nous allons utiliser un algorithme qui rapprochera les mailles autour des zones où le senser sera élevé et qui les éloignera dans le cas contraire. Cet algorithme utilisera les données fournies par l'erreur adjointe. Notre étude va traiter d'une adaptation de tout le maillage d'un profil d'aile en fluide non-visqueux, puis d'une adaptation pour un sillage d'un profil d'aile en fluide visqueux, et pour terminer d'une adaptation pour un sillage d'une aile en fluide visqueux.

Dans la suite, nous appellerons lissage le fait d'équidistribuer le maillage. Dans ce cas, si nous reprenons le formalisme donné dans la section 2.5.3, le matrice poids  $B$  est la matrice identité.

### 4.3.2 Adaptation globale, profil d'aile en fluide non-visqueux

Dans cette partie, nous avons utilisé le 2<sup>ème</sup> maillage RAE2822 le plus grossier du chapitre précédent ( $M=0.73$  et  $\alpha=2.5^\circ$ ). Au niveau du calcul, les différentes étapes ont été :

1. Calcul direct de l'écoulement
2. Calcul adjoint de l'écoulement obtenu
3. Calcul de la correction et de l'erreur
4. Adaptation avec la méthode elliptique pendant 5 itérations
5. Calcul direct à partir du maillage obtenu

Nous avons effectué quarante cycles et nous avons comparé notre adaptation de maillage à un maillage dont les mailles étaient lissées avec le même nombre d'itérations. Les maillages ainsi obtenus peuvent être visualisés sur la figure 4.23. Les résultats numériques sont sur le graphique 4.24. Nous avons une bonne convergence pendant vingt itérations du processus. Cependant au bout de vingt itérations, il semblerait que le processus d'optimisation du maillage tende vers le maillage complètement lissé. Le maillage obtenu est assez bien adapté au niveau du bord d'attaque, choc et bord de fuite. Malheureusement, en dehors de ces zones le maillage considéré au départ comme correct a été changé. Par exemple les mailles juste après le bord de fuite ont été étirées et cela dégrade la solution. De ce fait les résultats ne sont pas satisfaisants pour un

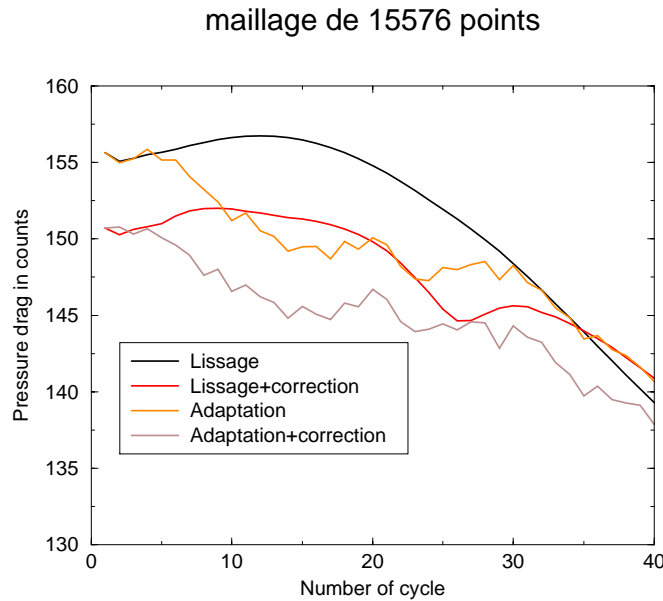


FIG. 4.24 – Convergence de la traînée de pression par lissage et adaptation de maillage (RAE2822 Euler transsonique)

maillage de type Euler et le sont encore moins dans la perspective d'adaptation de maillage de type Navier-Stokes.

Pour remédier à cela, deux pistes principales ont été abordées :

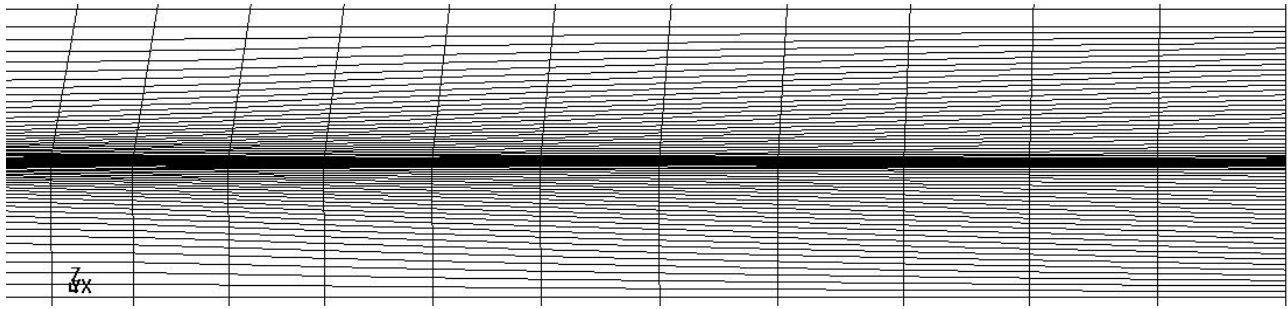
- Mieux formaliser le senseur (lissage du senseur, l'annuler dans les zones où le maillage ne doit pas bouger, ...)
- Utiliser un autre algorithme pour l'adaptation avec un passage par un espace paramétré (référence [30])

L'étude a commencé pour la première proposition mais cela ne résout pas tous les problèmes notamment le lissage des mailles proches du profil. Pour la deuxième option une refonte complète de l'outil de lissage au sein d'Airbus doit être réalisée pour pouvoir y insérer l'outil d'adaptation de maillage. Ce travail est en cours de réalisation.

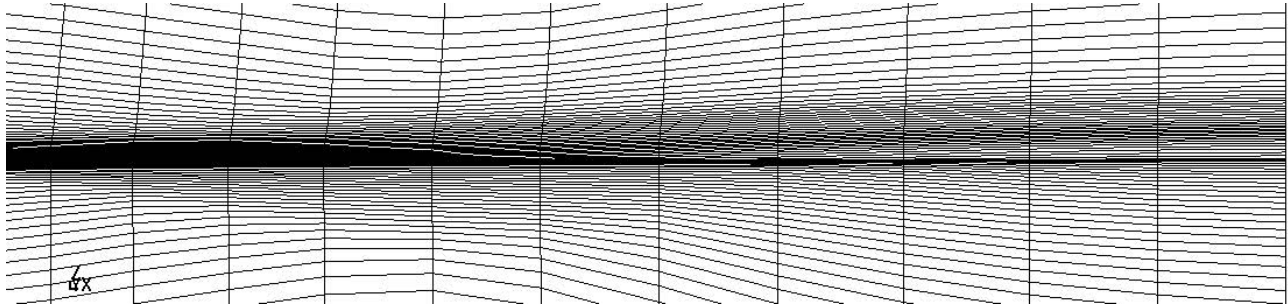
### 4.3.3 Adaptation pour sillage visqueux en deux dimensions

Pour essayer de s'affranchir des problèmes de lissage du maillage proche du profil, nous avons décidé de procéder à une adaptation du maillage dans le sillage du profil RAE2822 (section 3.2.2). L'erreur adjointe est calculée par rapport à la traînée issue de l'approche champ proche. Avant chaque adaptation de maillage, le senseur a été lissé. Dans l'algorithme d'adaptation, seul le déplacement selon l'axe vertical a été autorisé. Quarante cycles d'adaptation ont été effectués. La différence entre les parties avales du maillage de départ (fig. 4.25(a)) et du maillage adapté (fig. 4.25(b)) est très visible. Sur le maillage adapté, les mailles se resserrent autour du sillage. Nous pouvons aussi remarquer que certaines mailles loin du sillage se sont éloignées, engendrant un appauvrissement du maillage dans cette zone ce qui pourrait être problématique.

Sur la figure 4.26, quatre grandeurs caractéristiques de notre processus d'adaptation sont représentées. Le graphique 4.26(a) représente l'évolution de la valeur de notre fonction objectif



(a) Maillage initial



(b) Maillage adapté

FIG. 4.25 – Adaptation du sillage visqueux subsonique pour un profil RAE2822

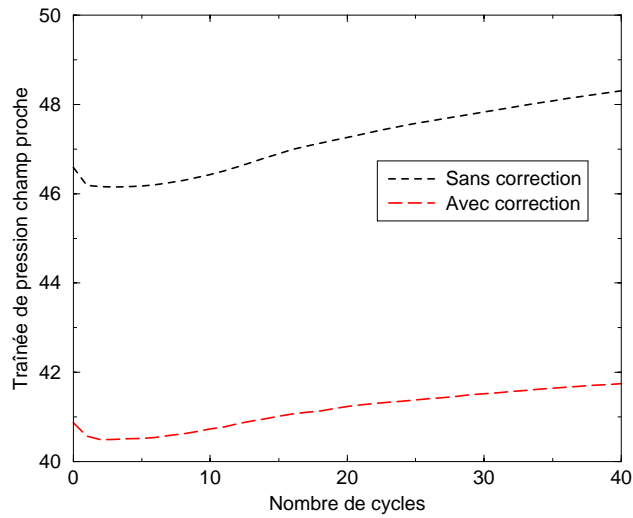
(traînée de pression champ proche) tout au long du processus d'adaptation de maillage. Après une diminution au début de l'adaptation, la traînée augmente. Cette tendance n'est pas acceptable car la traînée devrait baisser tout au long du processus d'adaptation de maillage si l'on se réfère au maillage de référence utilisé dans la section 3.2.2. Sur le graphique 4.26(b), l'adaptation du maillage augmente la valeur de la traînée parasite démontrant l'existence d'un problème. Les graphiques 4.26(c) et 4.26(d) montrent que les valeurs de la correction et l'erreur augmentent au cours des cycles d'adaptation. Ceux sont deux indicateurs pour déterminer la qualité d'une adaptation. Dans ce cas précis, leur augmentation indique que ce processus ne va pas dans le bon sens.

Les tendances de ces indicateurs nous indiquent très clairement que le processus d'adaptation n'a pas rempli sa fonction. En regardant l'évolution de la position des mailles, le lissage des mailles extérieures au sillage cause plus de tort à la solution obtenue que le rapprochement des mailles dans le sillage. Nous retrouvons encore ici les problèmes rencontrés avec le cas précédent.

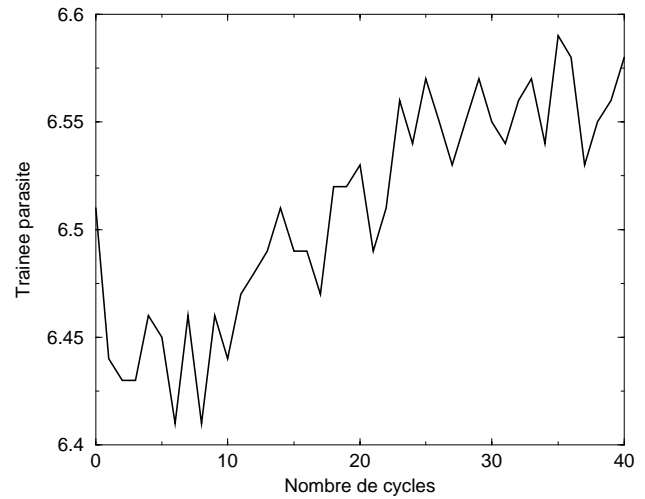
Il est toutefois intéressant de souligner l'utilisation de la correction et de l'erreur adjointes comme des indicateurs de la qualité du maillage.

#### 4.3.4 Adaptation pour sillage visqueux en trois dimensions

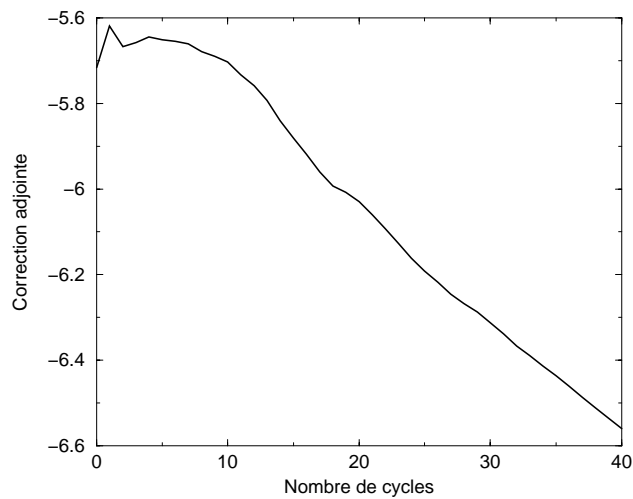
Encore une fois, pour essayer de s'affranchir des problèmes de lissage du maillage proche du profil, nous avons décidé de procéder à une adaptation du maillage dans le sillage de l'aile ONERA M6 (section 3.2.5). L'erreur adjointe est calculée par rapport à la traînée issue de l'approche champ proche. Dans l'algorithme d'adaptation, seul le déplacement selon l'axe vertical



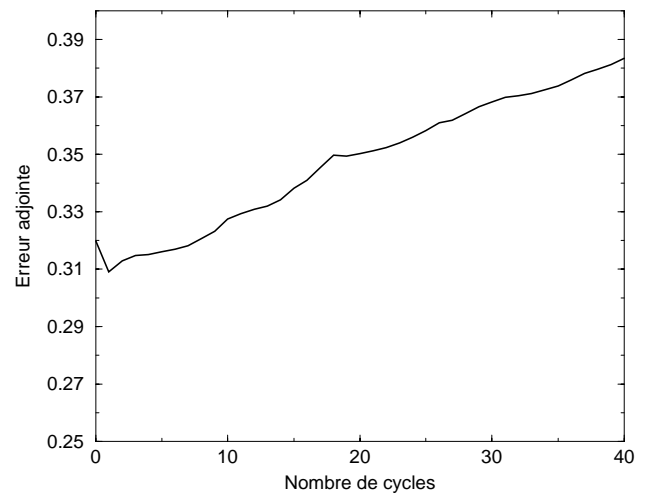
(a) Trainée de pression



(b) Trainée parasite



(c) Correction adjointe pour la traînée de pression



(d) Erreur adjointe pour la traînée de pression

FIG. 4.26 – Grandeurs caractéristiques de l'adaptation du sillage visqueux subsonique pour un profil RAE2822

a été autorisé.

L'exemple précédent nous a permis de mettre en évidence des indicateurs pour connaître la qualité de l'adaptation de maillage. Ils sont maintenant représentés sur la figure 4.27 dans le cas de l'aile ONERA M6. La traînée de pression devrait décroître pendant tout le processus d'adaptation. Sur le graphique 4.27(a), la traînée de pression décroît sur les vingt premiers cycles puis sa valeur augmente. La première partie de l'adaptation semble correct contrairement à la deuxième. En effet, si l'on se réfère au maillage de la section 3.2.5, la traînée de pression du maillage le plus fin n'est pas encore atteinte. Cette observation est confirmée par l'analyse de l'évolution de la correction et de l'erreur (figures 4.27(c) et 4.27(d)). L'erreur diminue durant les vingt premiers cycles puis augmente. Les mêmes observations sont applicables à la correction. L'évolution de la traînée parasite (fig. 4.27(b)) n'apporte aucun élément ici.

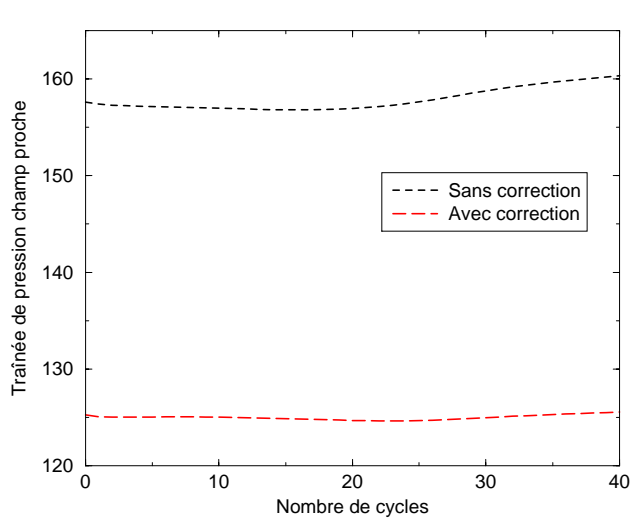
Grâce à ces observations nous connaissons la qualité de notre adaptation. Durant les vingt premiers cycles de l'adaptation, les mailles sont redistribuées dans le sillage qui est proche du raffinement de la couche limite. Malheureusement même si l'erreur est diminuée dans le sillage, elle reste forte au-delà. Etant donné que le nombre de mailles reste fixe, l'enrichissement du maillage en dehors du sillage l'appauvrit en mailles et dégrade la solution. Nous voyons ici qu'une combinaison entre le déplacement des noeuds et l'enrichissement de maillage serait une bonne solution.

Observons l'influence de l'adaptation de maillage sur des grandeurs dans le domaine de calcul. Sur la figure 4.28, les iso-bandes de la pression totale sont représentées sur cinq plans de coupe perpendiculairement au sillage. La figure 4.29(a) montre la forme du sillage sans adaptation de maillage. Le sillage est assez large et la forme du tourbillon de bout d'aile est allongée. Après vingt cycles d'adaptation de maillage (fig. 4.29(b)), le sillage est moins diffusé et le tourbillon de bout a une forme mieux définie. Avec cette adaptation, ce résultat se rapproche du sillage obtenu avec le maillage 2 de la section 3.2.5 (fig. 3.31(b)). Nous avons une amélioration de la solution numérique avec un nombre équivalent de points.

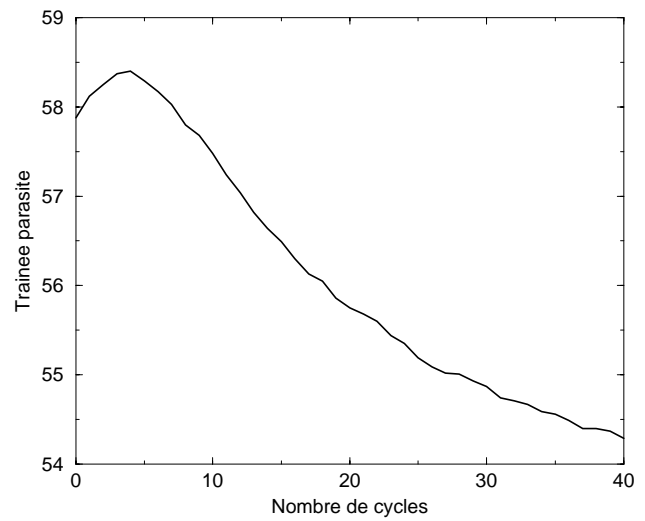
La théorie de la redistribution de noeuds de maillage se base sur une équidistribution de l'erreur considérée. La figure 4.29(a) montre les iso-bandes de l'erreur adjointe avant adaptation dans un plan de coupe perpendiculairement au sillage. L'erreur adjointe a une valeur faible dans le raffinement qui fait suite à la couche limite et est élevée au dessus et en dessous de ce raffinement. Après vingt cycles d'adaptation de maillage (fig. 4.29(b)), l'erreur adjointe est plus uniforme au niveau du sillage. Les valeurs en dehors du sillage ont aussi diminué. Cette adaptation de maillage remplit bien son rôle d'uniformisation de l'erreur. Malheureusement il n'y a pas assez de points dans le maillage pour garantir une bonne solution et une bonne équidistribution de l'erreur.

### 4.3.5 Bilan sur l'adaptation par déplacement des noeuds du maillage

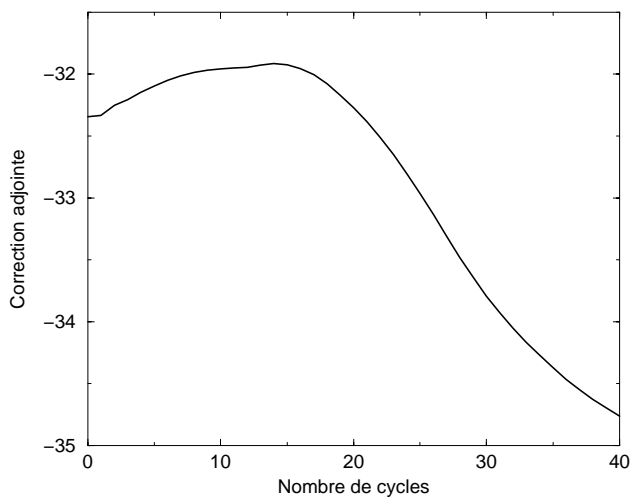
Une adaptation globale d'un profil d'aile en fluide non-visqueux nous a fait apprécier la difficulté de l'utilisation de l'algorithme de déplacement des noeuds du maillage. Par la suite, nous nous sommes restreints à l'adaptation de certaines zones du maillage (le sillage en aval de notre objet). Avec l'adaptation pour un sillage d'un profil d'aile, des indicateurs de la qualité du maillage et de l'adaptation ont pu être extraits. Ils ont montré encore une fois que l'adaptation n'était pas complètement maîtrisée. Avec ces indicateurs, nous avons pu juger de la qualité de l'adaptation pour le sillage d'une aile. Dans un premier temps l'adaptation de maillage se



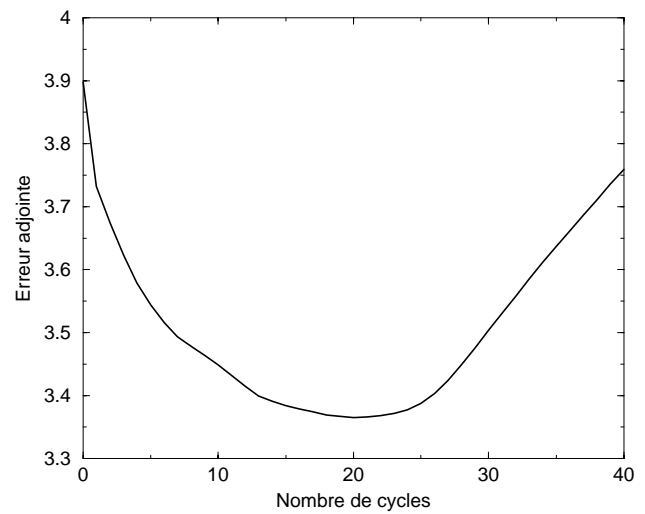
(a) Traînée de pression



(b) Traînée parasite



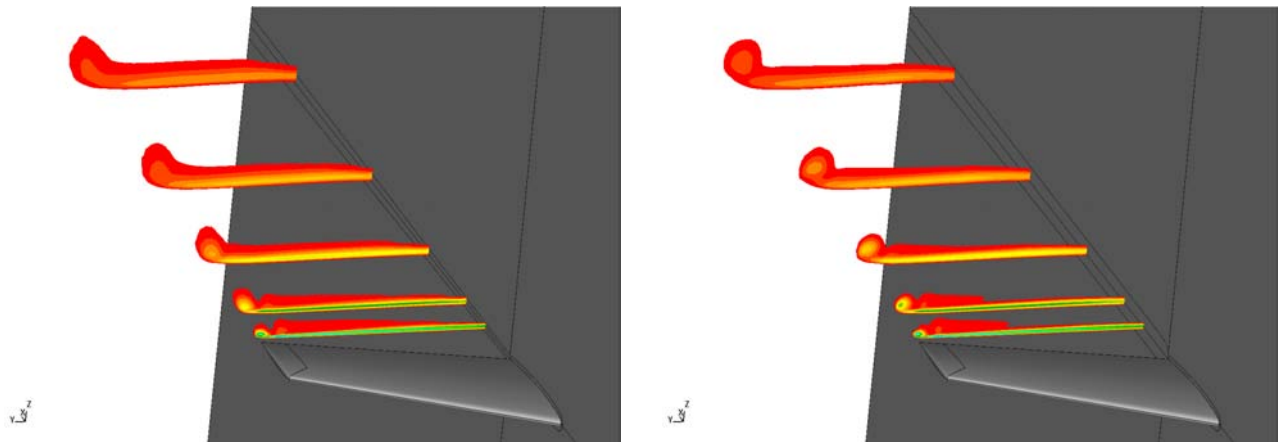
(c) Correction adjointe pour la traînée de pression



(d) Erreur adjointe pour la traînée de pression

FIG. 4.27 – Grandeurs caractéristiques de l'adaptation du sillage visqueux de l'aile ONERA M6

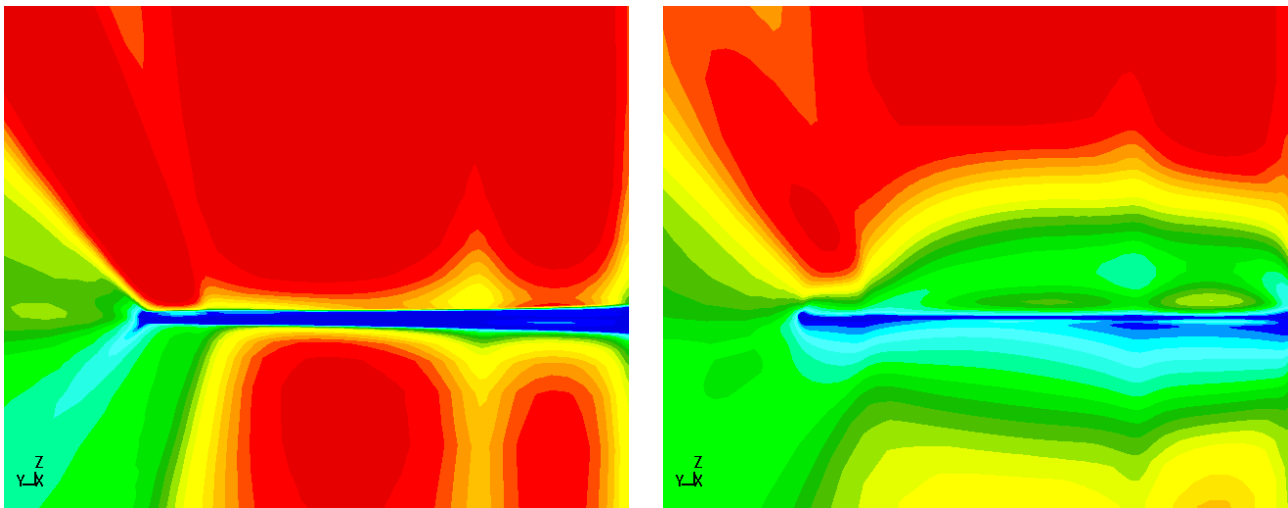




(a) Sans adaptation de maillage

(b) Avec 20 cycles d'adaptation de maillage

FIG. 4.28 – Iso-bandes de pression totale sur des plans de coupe dans le sillage de l'aile ONERA M6



(a) Sans adaptation de maillage

(b) Avec 20 cycles d'adaptation de maillage

FIG. 4.29 – Iso-bandes de l'erreur adjointe sur un plan de coupe dans le sillage de l'aile ONERA M6 (en rouge : erreur élevée, en bleu : erreur faible)

passé bien puis par la suite la solution se dégrade à cause du nombre insuffisant de mailles dans le domaine de calcul. Ces indicateurs peuvent fournir un critère d'arrêt pour l'adaptation par déplacement des noeuds.

## 4.4 Conclusion sur l'adaptation de maillage

Après avoir vu l'avantage de l'utilisation de l'erreur adjointe comme senseur sur les autres types d'erreurs, nous avons pu adapter les maillages.

L'enrichissement de maillage a donné de bons résultats pour un cas bidimensionnel non-visqueux et des cas 2D et 3D visqueux. Le résultat numérique a été amélioré aussi bien pour les données macroscopiques (portance, traînée) que pour les grandeurs locales (profil de coefficient de pression). L'enrichissement de maillage est un bon moyen de raffinement de maillage et d'amélioration de la solution de calcul numérique dans un contexte de maillage structuré. La méthode est complètement maîtrisée. De plus, elle peut être appliquée à des configurations industrielles.

Pour l'adaptation de maillage par déplacement des noeuds, nous avons commencé par traiter un cas simple non-visqueux en deux dimensions. Ce cas a mis en évidence les lacunes dans la maîtrise de l'approche retenue. Pour évaluer cette méthode, nous avons uniquement considéré des configurations maîtrisables. L'adaptation des maillages visqueux en deux et trois dimensions a prouvé que l'on pouvait savoir après analyse de l'erreur adjointe si le processus d'adaptation se passait bien ou pas. Cette méthode est pour l'instant applicable en prenant des précautions, c'est à dire en utilisant les indicateurs du bon déroulement de l'adaptation pour l'arrêter avant que la solution ne soit dégradée. Elle est toutefois très prometteuse.

Nous pouvons ici apercevoir le formidable potentiel qu'aurait une adaptation de maillage en commençant par un déplacement des noeuds du maillage et en finissant par un enrichissement du maillage par introduction de sous-blocs.

# Conclusion

L'objectif principal de la thèse était de trouver un moyen d'améliorer la précision des calculs CFD en aérodynamique externe sur des configurations industrielles. Deux stratégies ont été abordées. La première était de corriger directement les coefficients aérodynamiques comme la portance ou la traînée. La seconde était de calculer un champ volumique permettant d'adapter le maillage en enrichissant le maillage ou en déplaçant les noeuds du maillage.

La correction basée sur l'état adjoint a été appliquée avec efficacité aux coefficients aérodynamiques issus d'une approche champ proche sur des **maillages structurés**. Son application a été étendue aux composantes de la traînée issue d'une approche **champ lointain**. Ces deux développements ont montré l'importance du maillage pour effectuer une bonne correction adjointe. Les contraintes sur la qualité du maillage (raffinement approprié de la couche limite, raffinement judicieux du sillage, ...) sont apparemment plus grandes que si on effectuait un calcul sans correction. Mais d'un autre côté en suivant ces contraintes, le calcul direct est aussi amélioré. De **nouvelles fonctionnalités** pour la correction adjointe, comme l'extrapolation d'un résultat à partir d'un calcul non convergé ou le contrôle de convergence d'un calcul, ont été proposées pour enrichir nos connaissances sur le résultat d'un calcul CFD et sa validité. Enfin, la correction adjointe a été utilisée sur un **avion complet pour un fluide visqueux** avec succès. De plus le **temps de calcul** d'un calcul direct avec correction adjointe sur un maillage grossier reste inférieur au temps de calcul sur le maillage fin pour un résultat équivalent. Ainsi pour le maillage fin, le temps de calcul est environ deux fois plus élevé que sur le maillage grossier.

Dans un deuxième temps, après une étude succincte de différents senseurs, l'**erreur adjointe** a été combinée avec les méthodes d'adaptation de maillage. Les zones détectées par ce nouveau senseur se sont révélées très pertinentes. Le fait de rajouter des sous-blocs avec la **technique d'enrichissement de maillage** rapproche les valeurs de nos fonctions objectifs vers les valeurs du calcul de référence. Les résultats obtenus avec le déplacement des noeuds de maillage montrent que malheureusement nous n'avons pas encore eu le temps de maîtriser complètement cette technique. Cependant, nous avons développé des indicateurs pouvant nous montrer la qualité de ce genre d'adaptation.

Globalement, dans le cadre de cette thèse, nous avons développé et mis à disposition auprès d'Airbus un logiciel interfacé avec le code ElsA capable de calculer la correction et l'erreur basées sur l'opérateur adjoint. Ces informations ont été exploitées par les logiciels d'enrichissement de maillage et de déplacement des noeuds de maillage existant déjà au sein d'Airbus mais modifiés pour être utilisés pour la thèse. Nous avons effectué une analyse critique des différentes erreurs et de leur minimisation. Nous avons mis en évidence des limitations quant à des techniques plus classiques.

L'apport de cette thèse réside dans l'évaluation des performances de la correction adjointe par rapport à d'autres techniques, et ceci, pour des configurations complexes 3D intéressant les applications en aérodynamique. Nous avons su montrer que la correction adjointe est performante pour la prédiction des coefficients aérodynamiques sur des configurations complexes. La combinaison de l'erreur adjointe avec l'adaptation de maillage est satisfaisante même si elle reste à améliorer. Un article a été présenté sur ce travail de thèse à la conférence AIAA de San-Francisco en 2006 [9] sur les résultats en fluide non-visqueux.

### Perspectives

Cette thèse n'est qu'un premier pas vers le développement du potentiel formidable qu'offre la correction et l'erreur adjointe. Les futures étapes seront de concevoir un code qui utilise un raffinement local pour **économiser de la taille mémoire** et pouvoir traiter les plus grosses ou plus complexes configurations industrielles. Ensuite, la correction adjointe pourra être **appliquée à d'autres variables** comme par exemple l'intégrale de la pression sur un disque à la sortie d'un moteur d'avion qui est un excellent indicateur de la convergence d'un calcul. Nous pouvons aussi espérer étendre cette procédure à des **écoulements instationnaires**. Il faudra juste trouver la fonction objectif pertinente dans ce cas là. Enfin, la **réduction du temps de calcul** du vecteur adjoint sera aussi un enjeu pour rendre encore plus performante la correction et l'erreur adjointe.

Pour l'adaptation de maillage, nous avons vu que l'enrichissement de maillage était un bon moyen de raffinement. Cependant les sous-blocs doivent forcément se trouver à l'intérieur d'un bloc, ils ne peuvent pas être à cheval sur deux blocs ce qui peut potentiellement poser des problèmes. Il sera alors judicieux de changer de technologie et de proposer des raffinements de maillage en ajoutant des points par des techniques **chimères**. Enfin, il faudra **améliorer l'adaptation par déplacement des noeuds du maillage** car cela complétera les techniques d'enrichissement de maillage. Une **combinaison** entre l'enrichissement de maillage et l'adaptation par déplacement des noeuds du maillage semble être la solution idéale à considérer finalement.

# Bibliographie

- [1] *ElsA theoretical manual*. ONERA, 2002.
- [2] Djaffar Ait-Ali-Yahia, Guido Baruzzi, Wagdi G. Habashi, Michel Fortin, Julien Dompierre, and Marie-Gabrielle Vallet. “Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part II : Structured grids”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39 :657–673, 2002.
- [3] Hiroshi Akima. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17(4) :589–602, October 1970.
- [4] Stéphane Amant. *Calcul et décomposition de la traînée aérodynamique des avions de transport à partir de calculs numériques et d’essais en soufflerie*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, France, June 2002.
- [5] Stéphane Amant. User manual of ffd41. Technical report, Airbus, February 2006.
- [6] Timothy J. Baker. On the relationship between mesh refinement and solution accuracy. *AIAA paper*, 2005-4875, 2005.
- [7] Ravishankar Balasubramanian. *Adjoint-based estimation and grid adaptation for functional outputs from CFD simulations*. PhD thesis, Faculty of Mississippi State University, United-States, December 2005.
- [8] Ravishankar Balasubramanian and James Newman. Comparison of adjoint-based and feature-based grid adaptation for functional outputs. *AIAA paper*, 2006-3314, 2006.
- [9] Arnaud Barthet, Christophe Airiau, Marianna Braza, and Loïc Tournette. Adjoint-based error correction applied to far-field drag breakdown on structured grid. *AIAA paper*, 2006-3315, 2006.
- [10] R. Becker and R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 4 :237–264, 1996.
- [11] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to error estimation and mesh adaptation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10 :1–102, 2001.
- [12] Marsha Berger. “*Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations*”. PhD thesis, Stanford University, Computer Science Dept., 1982.
- [13] Marsha Berger and Phillip Colella. “Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics”. *Journal Computational Physics*, 82 :67–84, 1989.
- [14] Marsha Berger and Isidore Rigoutsos. “An Algorithm for Point Clustering and Grid Generation”. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics*, 21 :1278–1286, 1992.

- [15] J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant. Mémoire présenté par la division savante, Paris, 1887.
- [16] Olaf Brodersen, Mark Rakowitz, Stéphane Amant, Pascal Larrieu, Daniel Destarac, and Mark Sutcliffe. Airbus, onera, and dlr results from the 2nd aiaa drag prediction workshop. *AIAA paper*, 2004-391, 2004.
- [17] L. Cambier and M. Gazaix. elsa : An efficient object-oriented solution to cfd complexity. *AIAA paper*, 2002-0108, 2002.
- [18] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. "Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25 :475–491, 1997.
- [19] P. H. Cook, M. A. McDonald, and M. C. P. Firmin. "Aerofoil RAE 2822 - pressure distributions, boundary layer and wake measurements". *AGARD-AR-138*, 1979.
- [20] Marianne Cormery. "De l'optimisation aérodynamique vers l'optimisation multidisciplinaire dans un contexte industriel". PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse (France), December 2000.
- [21] J. Cousteix. *Turbulence et Couche limite*. Cepadues, 1989.
- [22] Daniel Destarac. Far-field/near-field drag balance and applications of drag extractions in cfd. Brussels, January 2003. VKI lecture.
- [23] Julien Dompierre, Marie-Gabrielle Vallet, Yves Bourgault, Michel Fortin, and Wagdi G. Habashi. "Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part III : Unstructured meshes". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39 :675–702, 2002.
- [24] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles. *J. Méc.*, 4 :361–421, 1965.
- [25] M. B. Giles and N. A. Pierce. Superconvergent lift estimates through adjoint error analysis. Special meeting to honour Prof. Phil Roe, Arcachon, 1998.
- [26] Michael B. Giles. Defect and adjoint error correction. In *First International Conference on Computational Fluid Dynamics*, Kyoto, July 2000.
- [27] Michael B. Giles and Niles A. Pierce. Improved lift and drag estimates using adjoint euler equations. *AIAA paper*, 99-3293, 1999.
- [28] Michael B. Giles and Niles A. Pierce. Adjoint error correction for integral outputs. Technical report, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, September 2001.
- [29] Wagdi G. Habashi, Julien Dompierre, Yves Bourgault, Djaffar Ait-Ali-Yahia, Michel Fortin, and Marie-Gabrielle Vallet. "Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I : general principles". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32 :725–744, 2000.
- [30] Rob Hagmeijer. *Adaptation of structured grids based on weighted least squares formulations*. PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands, September 1997.
- [31] Grégoire Hanss. "Error estimation". Technical report, CERFACS, December 2003.
- [32] Ralf Hartmann. *Adaptive Finite Element Methods for the Compressible Euler Equations*. PhD thesis, University of Heidelberg, Allemagne, 2002.

- [33] Ralf Hartmann. Error estimation and adjoint-based adaptation in aerodynamics. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Netherlands, September 2006.
- [34] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. Wiley Series in Numerical Methods in Engineering, 1987.
- [35] Hrvoje Jasak. “*Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow*”. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, June 1996. Also available on internet.
- [36] Hyoungh-Jin Kim and Kazuhiro Nakahashi. Output-based error estimation and adaptive mesh refinement using viscous adjoint method. *AIAA paper*, 2006-1395, 2006.
- [37] Hyoungh-Jin Kim, Yoshimichi Takano, and Kazuhiro Nakahashi. Error estimation and grid adaptation using euler adjoint method. *AIAA paper*, 2005-5336, 2005.
- [38] Hyoungh-Jin Kim, Yoshimichi Takano, and Kazuhiro Nakahashi. Error estimation and grid adaptation using euler adjoint method. *Journal of Aircraft*, 43(5) :1317–1324, October 2006.
- [39] W. Kordulla and M. Vinokur. Efficient computation of volumes in flow predictions. *AIAA journal*, 21(6) :917–918, 1983.
- [40] E. M. Lee-Rausch, M. A. Park, W. T. Jones, D. P. Hammond, and E. J. Nielsen. Application of parallel adjoint-based error estimation and anisotropic grid adaptation for three-dimensional aerospace configurations. *AIAA paper*, 2005-4842, 2005.
- [41] Claude Y. Lepage, France Suerich-Gulick, and Wagdi G. Habashi. “Anisotropic 3-D mesh adaptation on unstructured hybrid meshes”. *AIAA paper*, 2002-0859, 2002.
- [42] Ovidiu Manole, Paul Labbé, Julien Dompierre, and Jean-Yves Trépanier. “Anisotropic hybrid mesh adaptation using a metric field”. *AIAA paper*, 2003-3822, 2003.
- [43] P. W. McDonald. The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. *ASME paper*, 1971. 71-GT-89.
- [44] Matthieu Meaux. “Amélioration d’une chaîne d’optimisation de formes aérodynamiques en vue du traitement de configurations complexes en écoulements visqueux”. Master’s thesis, ENSICA/Airbus, 2001.
- [45] Matthieu Meaux, Marianne Cormery, and Guillaume Voizard. Viscous aerodynamic shape optimization based on the discrete adjoint state for 3d industrial configurations. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Finland, July 2004.
- [46] M. V. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. *Mécanique de la turbulence*, pages 367–380, 1961.
- [47] Jens-Dominik Muller and Michael B. Giles. Solution adaptive mesh refinement using adjoint error analysis. *AIAA paper*, 2001-2550, 2001.
- [48] B. Oskam and J. W. Sloof. Recent advances in computational aerodynamics at nlr. *AIAA paper*, 98-0138, 1998.
- [49] Michael A. Park. Adjoint-based, three-dimensional error prediction and grid adaptation. *AIAA paper*, 2002-3286, 2002.
- [50] Michael A. Park. Three-dimensional turbulent rans adjoint-based error correction. *AIAA paper*, 2003-3849, 2003.

- [51] Michael Andrew Park. Adjoint-based, three-dimensional error prediction and grid adaptation. *AIAA journal*, 42(9) :1854–1862, 2004.
- [52] Niles A. Pierce and Michael B. Giles. Adjoint recovery of superconvergent functionals from pde approximations. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 42(2) :247–264, 1999.
- [53] Niles A. Pierce and Michael B. Giles. Adjoint and defect error bounding and correction for functionnal estimates. *AIAA paper*, 2003-3846, 2003.
- [54] James J. Quirk. “*An Adaptive Grid Algorithm For Computational Shock Hydrodynamics*”. PhD thesis, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technologie, January 1991.
- [55] W. Reinders. Data report of the effect of in-flight icing on the 2d high lift model 5-6 in the low speed wind tunnel 1st. Technical report, NLR, 1994.
- [56] Lakhdar Remaki, Claude Lepage, and Wagdi G. Habashi. “Efficient anisotropic mesh adaptation on weak and multiple shocks”. *AIAA paper*, 2004-84, 2004.
- [57] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct and sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, pages 51–105, 1883.
- [58] Patrick J. Roache. Verification of codes and calculations. *AIAA journal*, 36(5) :696–702, 1998.
- [59] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [60] V. Schmitt and F. Charpin. Pressure distributions on the onera-m6-wing at transonic mach numbers. *AGARD-AR-138*, 1979.
- [61] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence mode for aerodynamic flows. *AIAA paper*, (92-0439), 1992.
- [62] A. Tam, M.P. Robichaud, P. Tremblay, W. G. Habashi, M. Hohmeyer, M. F. Peeters, G. Guèvremont, and P. Germain. “A 3-D Adaptive Anisotropic Method for External and Internal Flows”. *AIAA paper*, 98-0771, 1998.
- [63] Joe F. Thompson, Bharat K. Soni, and Nigel P. Weatherill. *Handbook of Grid Generation*. CRC Press LLC, 1999.
- [64] Damien Tortochaux, Jean-Philippe Estrade, and Guilhem Chantepedrix. User manual of ens++. Technical report, Airbus, July 2006.
- [65] J. van der Vooren and J. W. Sloof. Cfd-based drag prediction ; state-of-the-art, theory, prospects. The AIAA Professional Studies Series , Course on Drag-Prediction and Measurement, Portland, OR, USA, August 1990.
- [66] David A. Venditti and David L. Darmofal. A multilevel error estimation and grid adaptive strategy for improving the accuracy of integral outputs. *AIAA paper*, 99-3292, 1999.
- [67] David A. Venditti and David L. Darmofal. Adjoint error estimation and grid adaptation for funtionnal outputs : application to quasi-one-dimensionnal flow. *Journal of Computational Physics*, 164 :204–227, 2000.
- [68] David A. Venditti and David L. Darmofal. Grid adaptation for functional outputs of 2d compressible flow simulations. *AIAA paper*, 2000-2244, 2000.



- [69] David A. Venditti and David L. Darmofal. Anisotropic grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensionnal viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 187 :22–46, 2003.
- [70] David Anthony Venditti. *Grid Adaptation for Functional Outputs of Compressible Flow Simulations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, United-States, June 2002.
- [71] Wataru Yamazaki, Kisa Matsushima, and Kazuhiro Nakahashi. Application of drag decomposition method to cfd computational results. *AIAA paper*, 2005-4723, 2005.
- [72] Wataru Yamazaki, Kisa Matsushima, and Kazuhiro Nakahashi. Unstructured mesh drag prediction on drag decomposition. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Netherland, September 2006.

## Autres publications

Ces publications sont issues de mon stage de D.E.A et de mes interactions pendant la thèse au sein du groupe EMT2. Ces travaux sont relatifs à l'analyse par décomposition orthogonale en mode propre (P.O.D) des écoulements fortement décollés par expérience physique et simulation. Ils ont fait partie des programmes européens FLOMANIA (Flow Physics Modelling-an integrated approach) et DESIDER (Detached Eddy Simulation-an integrated approach), coordonnés par EADS-Münich, auxquels Airbus a participé.

1. Yannick Hoarau, Marianna Braza, Alistair Revell, Dominique Laurence and Arnaud Barthet. Physical analysis and modelling of turbulent unsteady flows around a wing. *Proceedings International Symposium ?Bluff Body Wakes and Vortex Induced Vibrations-4*, June, 2005.
2. Charles Mockett, Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Arnaud Barthet, Alain Sevrain and Frank Thiele. Joint numerical and experimental investigation of the flow around a circular cylinder at high Reynolds number. Invited in *Proceedings PivNet2 Final Workshop*, DLR, Göttingen, Germany, September, 7-8, 2006.
3. Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Arnaud Barthet, Alain Sevrain, Charles Mockett and Frank Thiele. Phase averaged turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high Reynolds number using POD. *13th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, June, 26-29, 2006.
4. Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Arnaud Barthet, Alain Sevrain, Charles Mockett and Frank Thiele. Phase averaged turbulence properties in the near wake of a circular cylinder at high Reynolds number using POD. selectionne pour publication dans un volume du *journal Experiments in Fluids* dedie au 13th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon,, en revision.
5. Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Franck Moradei, Arnaud Barthet, Alain Sevrain and Yannick Hoarau. Near-wake turbulence properties in the high Reynolds incompressible flow around a circular cylinder by 2C and 3C PIV. *6th ERCOFTAC International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements - ETMM6*, Sardinia, Italy, May, 23-25, 2005.
6. Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Franck Moradei, Arnaud Barthet, Alain Sevrain and Yannick Hoarau. Near-wake turbulence properties in

- the high Reynolds incompressible flow around a circular cylinder by 2C and 3C PIV. *J. Flow Turb. and Combust*, 77 :185-204, 2006.
7. Rodolphe Perrin, Marianna Braza, Emmanuel Cid, Sebastien Cazin, Alain Sevrain, Michael Strelets, Michael Shur, Yannick Hoarau, Arnaud Barthet, Gilles Harran and Franck Moradei. 3D circular cylinder (IMFT), Flow Physics Modelling-an integrated approach. In *dedicated volume in series Notes on Numerical Fluid Mechanics, Sci. Eds. B. Aupoix, U. Bunge , W. Haase, D. Schwaborn, Publisher Springer*, vol. 94, 2006.

# Annexe A

## Calcul de volume

### A.1 Introduction

Lors de l'élaboration de l'outil de calcul de la correction adjointe, nous avons dû calculer des volumes d'hexaèdre. Sur un maillage assez régulier, les techniques de calcul de volume sont assez connues et faciles d'emploi. Nous nous sommes rendus compte que pour les maillages utilisés dans cette thèse, certaines mailles n'étaient plus régulières. Ces mailles sont vrillées et cisailées. Les techniques habituelles pour ces mailles donnent parfois des résultats faux. Le calcul du volume des hexaèdres est alors devenu un point assez important dans cette thèse. Dans la suite de cette annexe, les techniques testées durant la thèse sont présentées. Nous finissons par une étude comparative sur un cas donné. Nous considérons à chaque fois une cellule avec les notations de la figure 1.2.

### A.2 Calcul du volume par le déterminant de la matrice Jacobienne

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées physiques et  $(\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées topologiques. Nous adoptons la notation  $x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}$ . La matrice jacobienne  $J$  s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Le volume  $V_{jac}$  est déterminé en calculant le déterminant de la matrice jacobienne :

$$V_{jac} = \text{Det}(J) = x_\xi(y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - z_\xi y_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta) \quad (\text{A.2})$$

Les dérivées topologiques sont calculées à partir des coordonnées du centre des faces de l'hexaèdre.

### A.3 Calcul du volume par décomposition en tétraèdre

Un hexaèdre peut être décomposé en six ou cinq tétraèdres (ref. [34, 39]). Le volume d'un tétraèdre FABC est obtenu par la formule :

$$V_{FABC} = \frac{1}{6} \overrightarrow{FA} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \quad (\text{A.3})$$

Si l'on considère la décomposition de l'hexaèdre en cinq tétraèdres avec comme origine le point  $D$ , le volume de la cellule  $V_{5tet_1}$  sera alors :

$$V_{5tet_1} = V_{DABE} + V_{DBCG} + V_{DEGH} + V_{DBGE} + V_{FBEG} \quad (\text{A.4})$$

Dans cette décomposition, quatre tétraèdres ont comme origine  $D$  et un  $F$ . Si on considère maintenant le point  $F$ , il n'existe qu'une seule autre décomposition en cinq tétraèdre. Le volume de la cellule  $V_{5tet_2}$  sera alors :

$$V_{5tet_2} = V_{FACB} + V_{FAEH} + V_{FCHG} + V_{FAHC} + V_{DACH} \quad (\text{A.5})$$

Pour un hexaèdre quelconque, les points d'une même face ne sont pas forcément coplanaires. Les équations A.4 et A.5 peuvent donner un volume différent. Il est recommandé de faire la moyenne de ces deux volumes :

$$V_{5tet} = \frac{V_{5tet_1} + V_{5tet_2}}{2} \quad (\text{A.6})$$

## A.4 Calcul du volume par la formule de la divergence

La base de cette théorie vient du fait que pour tout vecteur position  $\vec{x}$ , sa divergence  $\vec{\nabla} \cdot \vec{x}$  est égale à trois. Si on intègre cette quantité par rapport au volume on obtient :

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{x} \, dV = 3 \, V \quad (\text{A.7})$$

On peut développer cette expression avec le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{x} \, dV \\ &= \frac{1}{3} \oint \vec{x} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \vec{x}_i \cdot \vec{S}_i \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

avec l'indice  $i$  qui balaye les six faces de l'hexaèdre,  $\vec{S}_i$  les vecteurs normaux aux surfaces pointant vers l'extérieur de la cellule.

Pour un hexaèdre quelconque, les points d'une face ne sont pas forcément coplanaires. Il faut alors redéfinir les faces. Prenons par exemple la face  $ABCD$ . On détermine le centre  $P$  de la face en prenant son isobarycentre :

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$  ( $O$  est l'origine du repère). On définit quatre triangles  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  et  $DAP$ . Il ne reste qu'à calculer le vecteur surface de ces triangles et les sommer pour trouver le vecteur surface de la face de l'hexaèdre. Le vecteur surface du triangle  $ABP$  se calcule par la formule :

$$\vec{S}_{ABP} = \frac{1}{2} \vec{AP} \times \vec{BP} \quad (\text{A.9})$$

Le vecteur surface de la face est alors défini par :

$$\vec{S}_{ABCD} = \vec{S}_{ABP} + \vec{S}_{BCP} + \vec{S}_{CDP} + \vec{S}_{DAP} \quad (\text{A.10})$$

Le volume est alors calculé par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \vec{OP_i} \cdot \vec{S_i} \quad (\text{A.11})$$

avec  $P_i$  les six centres des six faces de la cellule.

## A.5 Comparaison des méthodes de calcul de volume

Pour comparer les différentes méthodes de calcul d'une cellule, nous allons utiliser le cas d'une cellule vrillée. Nous sommes partie d'un cube unitaire  $ABCDEFGH$  comme sur la figure 1.2. Le carré  $ABCD$  reste fixe et le carré  $EFGH$  opère une rotation autour de l'axe passant par le centre de la cellule du carré considéré. Lorsque l'angle de rotation est de  $0^\circ$ , la cellule n'est pas changée. Lorsque l'angle de rotation est de  $180^\circ$ , la cellule est complètement vrillée. Le point  $E$  se retrouve à l'ancienne place du point  $G$  et *vice versa*. Dans le cas de la cellule complètement vrillée, la cellule se résume à deux pyramides avec comme base les deux carrés considérés et comme sommet le centre de la cellule. Le volume de la cellule vaut alors le tiers du volume initial.

Sur la figure A.1, le volume calculé avec les trois méthodes est donné en fonction de l'angle de vrillage. La méthode du jacobien ne donne plus satisfaction lorsque l'angle de vrillage dépasse les  $10^\circ$ . Cette méthode est à réserver pour des maillages très réguliers. La méthode par décomposition en tétraèdre (Tetra) donne des résultats satisfaisant jusqu'à un angle de vrillage de  $90^\circ$ . Après cet angle certains des tétraèdres sont déversés (volume négatif) donc la méthode ne peut plus être utilisée. La méthode de la divergence donne des résultats correspondant à nos attentes avec une bonne valeur de  $1/3$  pour une cellule complètement vrillée.

La méthode de calcul par la divergence est la plus performante sur ce cas d'étude. Cette étude n'est pas exhaustive mais nous avons choisi cette méthode pour le calcul de la correction adjointe.

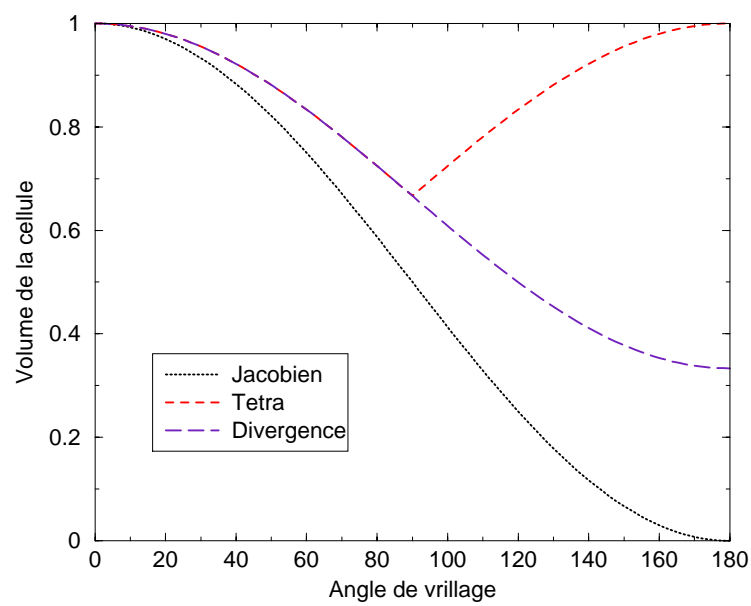


FIG. A.1 – Calcul du volume d’une cellule par trois approches différentes

# Annexe B

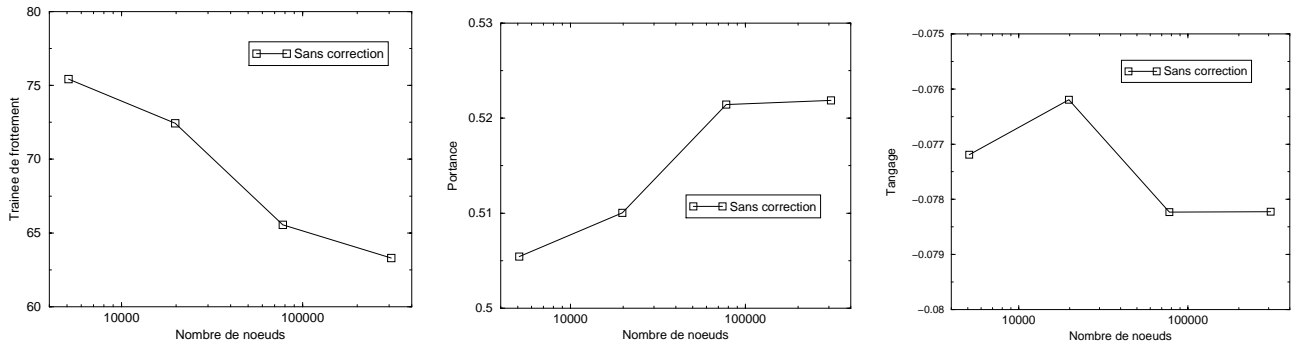
## Convergence des maillages Navier-Stokes

Les cas visqueux ne nous ont pas permis de faire de véritables convergences en maillage. En effet, une convergence en maillage se fait en raffinant à chaque fois le maillage isotropiquement, y compris la couche limite. Dans la suite de ce chapitre, nous exposerons les deux cas de convergence en maillage sur le profil RAE2822 en subsonique et transsonique.

### B.1 Cas du profil RAE2822 subsonique

Nous reprenons le profil RAE2822 pour un fluide visqueux en subsonique ( $Re=6\,300\,000$   $M=0.6$   $\alpha=2.05^\circ$ ). Sur la figure B.1, les coefficients de traînée de frottement, portance et tangage sont représentés. Les coefficients semblent tendre vers une valeur fixe. Cependant les convergences ne sont pas très régulières surtout pour le coefficient de tangage. Cela est peut-être dû au premier maillage qui doit être très éloigné de la convergence asymptotique en maillage.

Sur la figure B.2, nous retrouvons une convergence en maillage plus classique pour les coefficients de la traînée de pression issu de l'approche champ proche et de la traînée de pression visqueuse. La comparaison de ces résultats avec ceux utilisés dans la thèse montre que le fait de remailler la couche limite joue un rôle assez important pour le calcul de traînée autant avec une approche champ proche que champ lointain. L'amplitude de variation des coefficients de traînée sont plus important dans ce cas là.

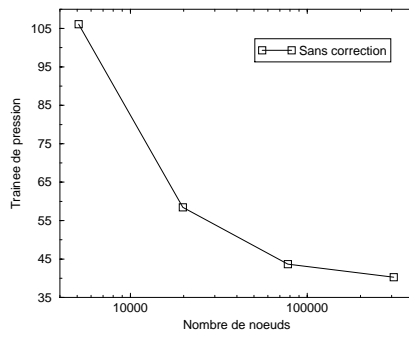


(a) Trainée de frottement

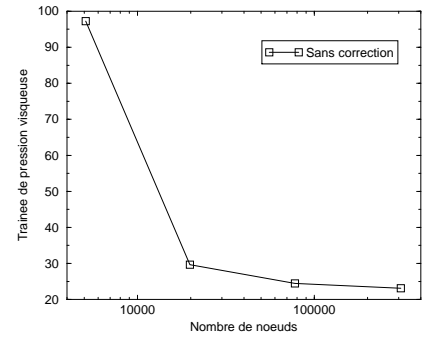
(b) Portance

(c) Tangage

FIG. B.1 – Convergence en maillage des coefficients aérodynamiques (RAE2822 NS subsonique)

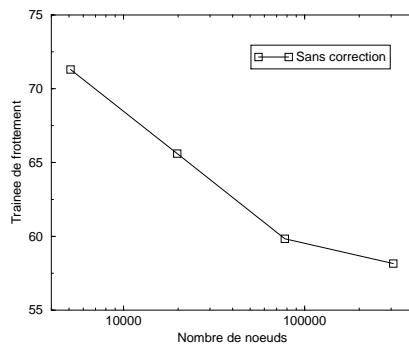


(a) Trainée de pression champ proche

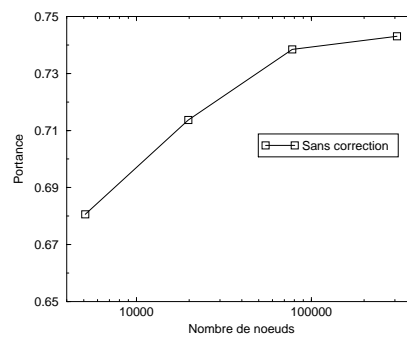


(b) Trainée de pression visqueuse

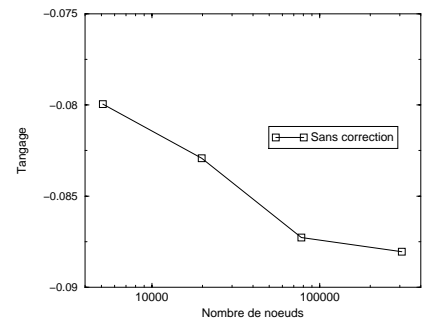
FIG. B.2 – Convergence en maillage des coefficients aérodynamiques (RAE2822 NS subsonique)



(a) Trainée de frottement



(b) Portance



(c) Tangage

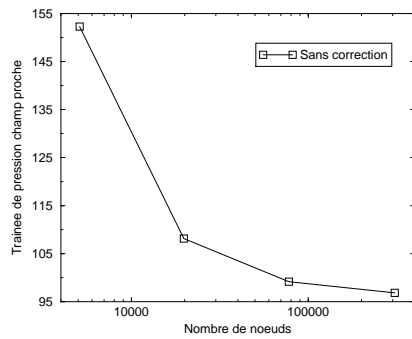
FIG. B.3 – Convergence en maillage des coefficients aérodynamiques (RAE2822 NS transsonique)

## B.2 Cas du profil RAE2822 transsonique

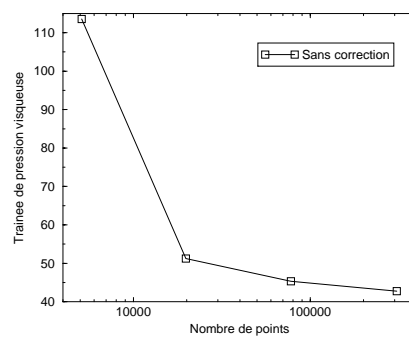
Nous reprenons le profil RAE2822 pour un fluide visqueux en transsonique ( $Re=6\,500\,000$ ,  $M=0.725$ ,  $\alpha=2.70^\circ$ ). Sur la figure B.3, les convergences des coefficients de tangage, portance et trainée de frottement sont représentées. Comme pour le cas subsonique avec ces coefficients, le maillage le plus grossier doit être trop loin de la convergence en maillage. Cela donne une impression de convergence non optimale.

Sur la figure B.4, les convergences des coefficients de trainée de pression, trainée de pression visqueuse et trainée de choc sont représentées. Pour ces coefficients la convergence est conforme à nos attentes.

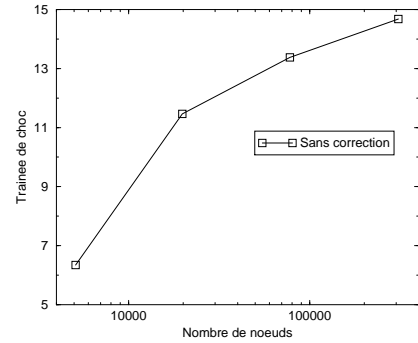




(a) Trainée de pression champ proche



(b) Trainée de pression visqueuse



(c) Trainée de choc

FIG. B.4 – Convergence en maillage des coefficients aérodynamiques (RAE2822 NS transsonique)

# Annexe C

## Bonne pratique de maillage

### C.1 Introduction

Le but de cette annexe est de résumer les points importants, vu pendant la thèse, à l'élaboration de maillages pour des configurations aérodynamiques. Il se peut que certaines informations soient évidentes pour un lecteur averti, cependant il est bon de rappeler les bonnes pratiques de maillage même les plus élémentaires. Ces maillages vont être élaborés par rapport à des conditions d'écoulement pour un avion de type Airbus en régime de croisière (écoulement transsonique, stationnaire, pas d'angle de dérapage,...).

### C.2 Dimension du domaine de calcul

Les conditions au limite du domaine de calcul ont une influence sur le calcul. Elles ont une influence non négligeable sur l'écoulement si elles sont trop proche du corps étudié. Cela est particulièrement vrai en deux dimensions comme nous l'avons montré dans la section 3.1.2. Pour ces **configurations en deux dimensions une distance de cent cordes entre le profil et les limites du domaine** doit être respectée (voir fig. C.1). Ce n'est pas souvent le cas pour des maillages de type industriel. Il est alors recommandé d'utiliser une décomposition de la trainée par une approche champ lointain pour avoir une valeur de la trainée qui n'est pas influencée par la distance entre le profil et les limites du domaine (ceci a été montré sur la figure 3.6(b)).

Dans le cas des **configurations en trois dimensions**, l'impact de la distance entre le corps et les limites du domaine sur le résultat du calcul est moins critique. Considérons un demi avion s'appuyant sur un plan de symétrie, constitué d'une aile et d'un fuselage avec un écoulement sans angle de dérapage. Soit  $B$  la distance entre le bout de l'aile et le plan de symétrie. Dans l'idéal les dimensions du domaine entre l'avion et les limites du domaine de calcul sont pour les **limites du domaine amont, latérale, supérieure et inférieure de  $7B$  et pour la limite du domaine aval de  $13B$**  (voir fig. C.2).

### C.3 Maillages en deux dimensions

Ce type de maillage d'apparence simple est un bon cas pour mettre en place toutes les bonnes pratiques de maillage qui seront applicables sur des cas tridimensionnels. Cette section

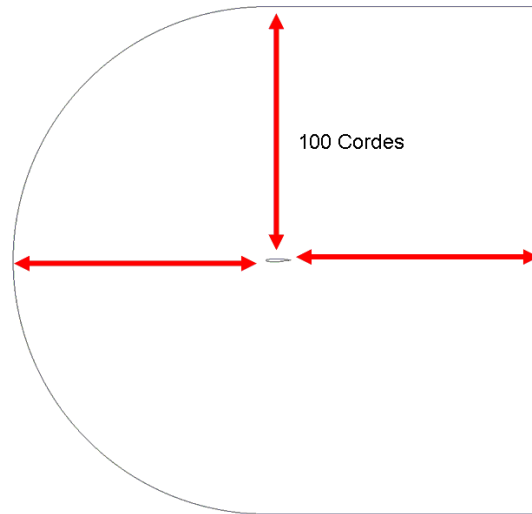


FIG. C.1 – Distance entre le corps calculé et les frontières du domaine de calcul en deux dimensions (la figure n'est pas à la bonne échelle)

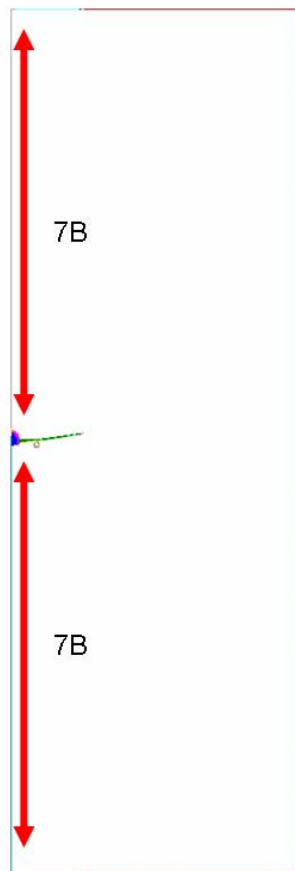
a été décomposée en deux parties qui suivent le processus de génération de maillage à Airbus. En effet, ce processus se décompose tout d'abord avec la génération d'un maillage de type Euler. Ce maillage doit être construit pour répondre à toutes les exigences d'un écoulement en fluide non-visqueux ainsi qu'anticiper la construction du maillage de la couche limite. Ceci correspond à la deuxième partie de la construction d'un maillage qui donne un maillage dit de type Navier-Stokes. Les contraintes de ce genre de maillage pour un écoulement visqueux seront données dans la seconde partie de cette section. Le cas d'étude que nous allons étudier ici est le maillage d'un profil d'aile. Ce cas peut servir de base pour d'autre forme.

Une illustration de ces recommandations se trouve sur la figure C.3.

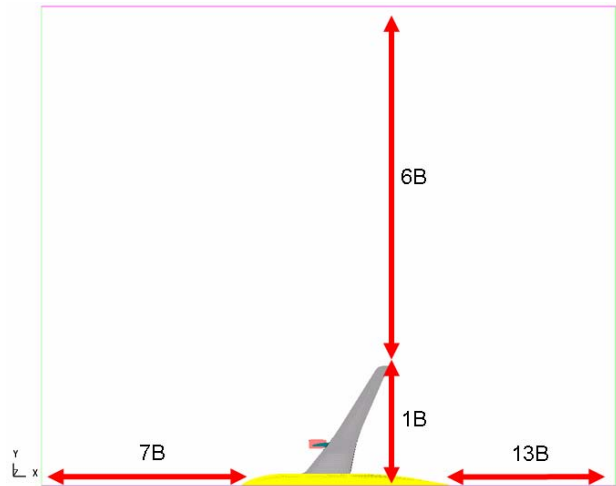
### C.3.1 Maillages de type Euler

#### C.3.1.1 Discrétisation de la forme

Un profil aérodynamique se décompose en trois parties principales. La première composé du bord d'attaque du profil a une courbure assez élevé. Il faut avoir une discrétisation assez élevé pour que la forme vu par le solveur soit la bonne et non pas par exemple un bord d'attaque avec une forme en point alors que c'est un arrondi. Il a été montré dans cette thèse qu'une bonne discrétisation du point d'arrêt était aussi préférable. Cependant, étant donné que l'on ne sait pas où se trouvera ce point d'arrêt il faut prendre des précautions en mettant des points de maillage à des endroits susceptibles d'être le point d'arrêt. La deuxième partie est composée du milieu du profil à l'extrados et l'intrados. Ce sont des courbes généralement assez linéaire qui ne demande pas une discrétisation trop fine si on se trouve en régime subsonique. En régime transsonique, il faut avoir un maillage avec des points plus rapprochés pour pouvoir bien capter le choc. En effet la discrétisation que l'on fait sur la peau va se propager jusqu'aux limites du domaine. Pour finir, nous arrivons au bord de fuite. Les mailles doivent se resserrer par rapport à la discrétisation de la partie précédente pour anticiper le passage de l'écoulement dans le volume. Cette zone a été marquée par le senseur adjoint par exemple sur la figure 4.3(b).

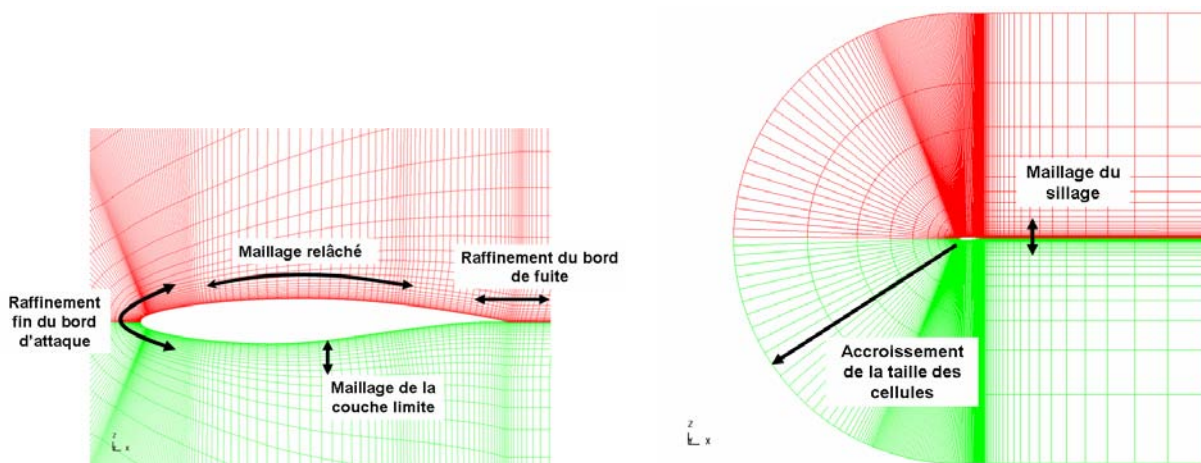


(a) Limites supérieure et inférieure

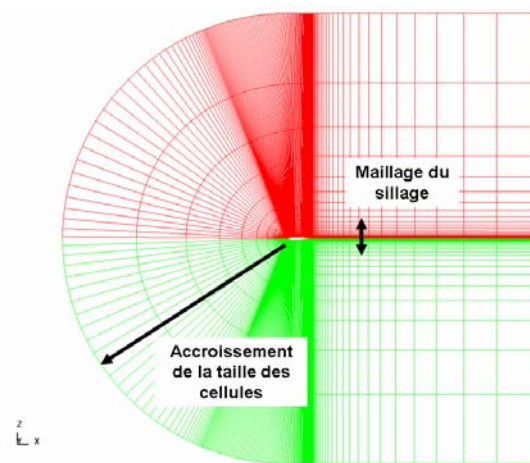


(b) Limites amont, latérale et aval

FIG. C.2 – Distance entre le corps calculé et les frontières du domaine de calcul en trois dimensions (la figure n'est pas à la bonne échelle)



(a) Proche du corps



(b) Dans le volume

FIG. C.3 – Recommandations pour les maillage en deux dimensions

Dans le cadre de cette thèse nous avons aussi traité le cas d'un profil avec forme de givre. Ce cas est intéressant car il introduit une forme avec une pointe. Ceci peut être appliqué par exemple à une marche ou une sonde placée sur un profil. Le maillage que l'on avait utilisé n'était pas assez fin au niveau de cette pointe. Il faut attacher une attention particulière à la discrétisation assez fine de cette zone en resserrant les mailles avant la pointe puis après car le calcul numérique de ce contournement est assez difficile.

### C.3.1.2 Discrétisation dans le volume

Après avoir donné la distribution de point dans le sens du profil, nous allons regarder cette distribution du profil jusqu'aux limites du domaine. Pour commencer les mailles doivent partir dans la mesure du possible perpendiculairement par rapport au profil. Les maillages doivent avoir une évolution partant de petite maille proche du profil vers de grosses mailles lorsque l'on atteint les limites du domaine de calcul. Une évolution géométrique fait très bien l'affaire. Pour le maillage à l'arrière du profil, on peut considérer un rectangle dont le centre dans le sens de la longueur se trouvera sur le bord de fuite du profil. L'évolution de l'espacement des mailles dans le sens de la longueur doit être comme précédemment. Au contraire pour les mailles dans le sens de la largeur, on doit considérer la partie proche du bord de fuite et celle à la limite du domaine. Proche du bord de fuite les mailles doivent être de petites tailles. Ensuite il doit y avoir un évasement qui doit s'effectuer dans le sillage pour que l'on puisse avoir des mailles proches de la limite du domaine de calcul dont le rapport d'aspect<sup>1</sup> ne soient pas trop grand. Ceci a pour but d'une part d'anticiper la mise en place du maillage de la couche limite et du sillage, et d'autre part de ne pas avoir de problème de stabilité de calcul lorsque l'on se trouve dans une situation de multigrille de niveau trois où des mailles avec un rapport d'aspect trop grand pourraient rendre instable la résolution du problème.

## C.3.2 Maillages de type Navier-Stokes

Après avoir fait le maillage de type Euler, un outil interne à Airbus va rajouter le raffinement de la couche limite autour de notre profil. Il ne faut pas oublier que ces points seront utilisés pour la discrétisation du sillage. Au niveau de la couche limite, il faut une taille de maille plus petite au bord d'attaque et qui croît jusqu'à atteindre le bord de fuite. Par ce biais, il n'y aura pas une zone qui sera trop raffinée par rapport à une autre. Cela peut arriver dans la génération de maillage non-structuré quand on prend la même taille de la première maille du bord d'attaque au bord de fuite. L'évolution du maillage de couche limite dans le sens perpendiculaire au profil suit une loi déterminée pour une évolution de couche limite sur plaque plane. Pour l'instant cette approche est satisfaisante pour les cas traités à Airbus. La couche limite faite, les mailles doivent être équidistribuées dans le sillage. Cette opération peut bien se faire si lors de l'élaboration du maillage de type Euler, la topologie en C a bien été évasée à la limite de sortie du domaine de calcul.

---

<sup>1</sup>le rapport d'aspect ou aspect ratio est le rapport entre la longueur et la largeur. Un grand rapport d'aspect implique une maille étirée

## C.4 Maillages en trois dimensions

Les différents éléments d'un avion sont composés de profil pour ce qui est de l'aile, la nacelle, le mât et le fuselage. La démarche que nous avons exposée dans la section précédente est applicable en trois dimensions. Il suffit de le reproduire dans le sens de la troisième dimension. Nous allons ici plus insister sur des problèmes plus spécifique que nous avons rencontrer pendant la thèse.

### **Jonction dites en C45 et C90 (voir fig. 3.38)**

Pour le maillage d'un coin telle une jonction aile fuselage, une topologie en C90 est préférable à celle en C45. Cela permet d'avoir une meilleur discrétisation du coin. Cependant cette approche est très coûteuse en nombre de points, il faut alors faire un choix entre le nombre de points du maillage et la bonne définition de cette partie de l'écoulement. Il y a une dizaine d'année avec la puissance de calcul disponible il n'y avait que des jonctions en C45. De nos jours ce genre de topologie en C45 n'est utilisé que pour l'ajout de winglet, les autres jonctions sont en C90.

### **Croisement de sillage et de zones de maillage raffinées**

Dans cette section, nous voulons mettre l'accent sur la difficulté que peut éprouver le code de calcul lors de la résolution des équations quand un sillage ou un jet venant d'un moteur par exemple doit passer à travers une zone ayant un rapport d'aspect élevé. Dans ce cas là, le calcul a de grande chance de devenir instable. Si cette situation se produit cela veut dire que l'évasement d'un sillage venant d'une couche limite a été mal fait et il n'y a pas eu équidistribution des mailles dans le volume d'où une zone de calcul source de problèmes.

### **Raffinement des culots**

Même s'il est plus simple de faire des culots d'aile pincés dans la réalité, le culot est épais. Il y a alors une recirculation qui se produit à cet endroit. Si ce phénomène doit être bien reproduit il faut alors bien discrétiser cette zone. Les mailles qui seront parallèles au culot vont engendrer un grand nombre de point dans des zones n'ayant pas besoin d'une discrétisation si forte. Le traitement des culots épais est un choix entre précision du calcul et nombre de points envisageable. Pour ne pas à avoir à faire ce choix, dans le passé, les culots épais avaient des conditions numériques de type glissement ce qui demande une discrétisation moindre.

## C.5 Conclusion

Cette annexe a fourni les premières grandes lignes pour faire des maillages assez simples. Souvent la difficulté vient du fait de faire coexister ces contraintes assez simple dans le même maillage. Des conflits de topologie peuvent intervenir, cisailer des mailles, ... Au final, un maillage excellent partout est très compliquer à obtenir. Il faut savoir ce que l'on cherche avec ce maillage et ce calcul pour pouvoir faire ses choix et déterminer les zones importantes du maillage.

# Index

## A

Aile M6	
non-visqueux .....	51
visqueux .....	66, 85, 90, 98
Algorithme de	
Berger et Rigoutsos .....	40
Quirk .....	38
AMR	
application .....	87
théorie .....	37
AS28G	
non-visqueux .....	56
visqueux .....	72

## C

Correction adjointe	
avec interpolation .....	29
idéale .....	29

## E

Erreur adjointe .....	29, 32
-----------------------	--------

## H

h-refinement .....	37
Hessien .....	26

## I

Interpolation	
Akima .....	31
linéaire .....	30

## P

p-refinement .....	37
Profil avec givre .....	62, 89

## R

r-refinement .....	37
Résidu explicite .....	18, 26
RAE2822	
non-visqueux	
subsonique .....	45, 87

transsonique .....	49, 96
--------------------	--------

visqueux	
subsonique .....	59, 79, 97
transsonique .....	64, 83

## Richardson

correction .....	23
correction généralisée .....	23
erreur .....	25

## S

### Schéma

spatial .....	18
temporel .....	18

### Senseur

adjoint .....	81, 83, 87
gradient .....	80, 83
hessien .....	26
résidu .....	26
richardson .....	25

## T

Temps de calcul .....	56, 76
-----------------------	--------

# Résumé

Ce travail traite de la précision des méthodes numériques pour la simulation d'écoulements externes autour de structures portantes. Le but est de développer des méthodes numériques pour l'amélioration de la prévision des coefficients aérodynamiques (portance, traînée,...) qui sont des grandeurs fondamentales pour l'industrie aéronautique.

Une correction basée sur l'opérateur adjoint est utilisée pour corriger les coefficients aérodynamiques issus de calcul numérique RANS. Cette technique est appliquée aux maillages structurés. La combinaison de cette approche avec une analyse de la traînée champ lointain est opérationnelle.

Cette correction est étudiée sur plusieurs cas tests partant d'un profil 2D jusqu'à un avion complet. Une erreur est aussi générée à partir de l'opérateur adjoint qui est utilisée pour adapter le maillage par une technique d'enrichissement de maillage et une autre par déplacement des noeuds.

**Mots clés :** Méthode adjointe, Traînée, Traînée champ lointain, Correction de coefficients aérodynamiques, Adaptation de maillage

# Abstract

The present work deals with the numerical methods accuracy for external flow simulation around lifting body configurations. The main purpose is to develop numerical methods to improve aerodynamics coefficients prediction (lift, drag, ...) which are essential for the aircraft industry.

An adjoint-based error correction is applied to correct aerodynamics coefficients issued from RANS computation. This is applied to structured meshes. The combination between this correction and a far-field drag analysis is fully implemented.

The adjoint-based correction is studied on several test cases from a 2D profile to a fully plane. An adjoint-based error is also generated and it is used to adapt meshes by enrichment of mesh and moving nodes.

**Keywords :** Adjoint method, Drag, Far-field drag, Aerodynamics coefficients correction, Mesh adaptation